

VERKEHRSSIMULATION AUF BASIS DISKRETER  
DYNAMISCHER SYSTEME

Sven Banisch und Marcel Heunemann

November 2006

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Warum Verkehrssimulation . . . . .	2
1.2	Mathematische Modelle . . . . .	3
1.3	Mikroskopische Simulation und Differentialgleichungen . . . . .	4
1.4	Dynamische Systeme . . . . .	6
1.5	Eine Vorschau . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Modellentwicklung</b>	<b>8</b>
2.1	Physikalisch–Mechanische Beschränkungen . . . . .	9
2.2	Intuitive Herangehensweise . . . . .	9
2.3	Das „Optimal–Distance–Modell“ als Basismodell . . . . .	12
2.4	Modellvarianten im Simulationsprogramm und ein genereller Modellvorschlag	16
<b>3</b>	<b>Simulation und Analyse</b>	<b>20</b>
3.1	Numerische Simulation und auftretende Effekte . . . . .	20
3.1.1	Ein konkretes Beispiel . . . . .	23
3.2	Analytische Untersuchungen . . . . .	25
3.2.1	Verkehr als diskretes dynamisches System . . . . .	26
3.2.2	Strategien für den generellen Fall – $N$ Fahrzeuge . . . . .	30
3.2.3	Spezielle Untersuchungen – 3 Fahrzeuge . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Abschließende Einschätzung und Ausblick</b>	<b>40</b>
<b>A</b>	<b>Simulationsbeispiele</b>	<b>47</b>
<b>B</b>	<b>Verhalten zweier Autos auf der Kreisbahn</b>	<b>48</b>

# 1 Einleitung

«Alle 14 Sekunden ereignet sich ein Unfall auf deutschen Straßen. Jede Stunde werden 49 Personen bei Verkehrsunfällen verletzt. Täglich verlieren 15 Menschen ihr Leben im Straßenverkehr. Deshalb kommt der Erhöhung der Verkehrssicherheit weiter eine große Bedeutung zu. Die EU-Kommission hat sich zum Ziel gesetzt, die Zahl der Todesopfer im Straßenverkehr in der Europäischen Union vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2010 zu halbieren.»

## 1.1 Warum Verkehrssimulation

Jedes Jahr rollen mehr und mehr Autos über unsere Straßen. Die Zeit, die auf den Straßen verbracht wird, ist mittlerweile ein wichtiger Wirtschaftsfaktor geworden. Und nicht zuletzt ist die enorme Anzahl von Verkehrsunfällen ein wichtiger Beweggrund sich mit dem Thema Verkehr auseinanderzusetzen. Das oben angeführte Zitat zeigt, daß auch die Politik die Notwendigkeit weiterer Untersuchungen im Bereich der Verkehrsforschung erkennt und ein klar definiertes Ziel verfolgt: «die Zahl der Todesopfer im Straßenverkehr in der Europäischen Union vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2010 zu halbieren.»

Damit wäre ein erster elementarer Beweggrund für die Beschäftigung mit dem Thema Verkehr benannt. Die Graphik „Verunglückte, Getötete und Bestand motorisierter Fahrzeuge“ des Statistischen Bundesamtes Deutschland [25] zeigt die Unfall- und Bestandsentwicklung in den letzten 3 Jahrzehnten. Anhand der Graphik „Entwicklung der im Straßenverkehr Getöteten von 1953 bis 2005

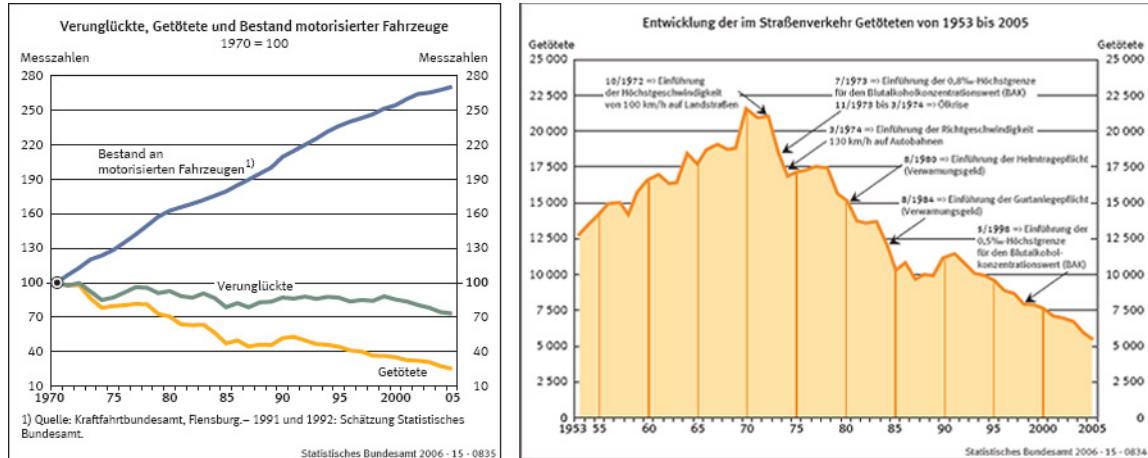


Abbildung 1: Aus „Unfallgeschehen im Straßenverkehr 2005“ [25]

Getöteten von 1953 bis 2005“ auf der rechten Seite wird deutlich, dass es möglich ist die Unfallentwicklung durch geeignete Maßnahmen positiv zu beeinflussen. Diese Arbeit soll denn auch einen Beitrag leisten, herauszufinden, wie solche verbessernden Maßnahmen aussehen können.

Neben der Verhinderung von Unfällen gibt es allerdings noch eine Anzahl weiterer Gründe, die Verkehrsuntersuchungen und Simulationen interessant machen. Wie Eingang schon erwähnt, ist der Wirtschaftsfaktor Zeit ein wichtiger Untersuchungsgegenstand, und so wird Verkehrsforschung auch immer häufig vor dem Hintergrund einer Zeitoptimierung betrieben, in dem Sinne, daß der Aufenthalt einzelner, mehrerer oder sogar aller Verkehrsteilnehmer auf den Straßen minimiert werden soll. Dies geht unmittelbar einher mit dem Versuch eines besseren Verständnisses der Effekte in Bereichen hohen Verkehrsaufkommens, wie z.B. Verkehrsstaus und sogenannte „Stop and Go“-Situationen. Des Weiteren ist in Zeiten hoher Kraftstoffpreise sicherlich auch eine Minimierung des Kraftstoffverbrauchs eine sehr interessante Fragestellung, welche neben der Fahrzeit noch andere Faktoren in Betracht ziehen müßte.

Es gibt verschiedene Herangehensweisen solche Probleme zu bearbeiten und offene Fragen zu beantworten. Eine Möglichkeit sich ihnen zu nähern ist es, ein mathematisch-physikalisches Modell der realen Gegebenheiten zu formulieren, um dann mit Hilfe der Mathematik zu bestimmten Aussagen, und schließlich, zu einem besseren Verständnis zu gelangen. Diesen Weg werden wir in dieser Arbeit verfolgen.

## 1.2 Mathematische Modelle

Je nach Fragestellung wird sehr unterschiedlich an die Modellierung und die Simulation von Verkehr herangegangen. Eine Möglichkeit der Klassifizierung solcher Modelle, wie sie häufig in der Literatur zu finden ist, unterteilt die verschiedenen Herangehensweisen in makroskopische, mesoskopische bzw. mikroskopische Modelle [16, 8]. Wir werden später insbesondere auf die mikroskopische Simulation einzugehen haben, zunächst soll aber erläutert sein wie diese Einteilung zustande kommt. Außerdem werden einige wichtige Vertreter verschiedener Bereiche kurz vorgestellt.

Makroskopische Modelle betrachten das Verkehrssystem als Ganzes und rücken den einzelnen Verkehrsteilnehmer in den Hintergrund. Eine wichtige Rolle spielen hier z. B. Netzwerksimulationen und graphentheoretische Herangehensweisen, mit deren Hilfe ein ganzes System von Straßen (z.B. der Stadtverkehrsplan) simuliert werden kann. Somit beschreiben makroskopische Modelle die zeitliche Veränderung lokaler Größen, wie beispielsweise Verkehrsdichte, Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsveränderungen.

Einige Vertreter dieser makroskopischen Herangehensweise basieren auf der Davidschen Reisezeitfunktion<sup>1</sup>

$$t = t_0 [1 + J_D x / (1 - x)], \quad (1)$$

wobei  $t$  die durchschnittliche Reisezeit für normalisierte Distanzen darstellt,  $t_0$  die minimale Reisezeit und  $J_D$  einen Verzögerungsparameter. Der Parameter  $x = \frac{q}{Q}$  repräsentiert den Grad der Straßenauslastung, wobei  $q$  die Rate ankommender Autos und  $Q$  die Kapazität des Systems beschreibt. Diese Formel zur Ermittlung der durchschnittlichen Reisezeiten

---

<sup>1</sup>In dem englischen Originaltext [1], der dieser Kurzbeschreibung zu Grunde liegt, „travel time function“.

wurde 1966 (bzw. 1978) von Davidson [5] herausgearbeitet und in darauffolgenden Arbeiten (z.B. [1]) weiter verbessert, um die realen Umstände besser zu simulieren.

Eine weitere Herangehensweise an makroskopische Verkehrssimulation, welche hier kurz aufgezeigt werden soll, wurde erst vor einigen Monaten an der Technischen Universität Dresden unter der Leitung von D. Helbing<sup>2</sup> wieder aufgegriffen [9]: die Verkehrsflußanalyse auf Basis gas-kinetischer Gleichungen und den physikalischen Bewegungsgesetzen in Flüssigkeiten (siehe insbesondere [22, 7]). Prinzipiell handelt es sich dabei um den Versuch, Modelle zur Simulation der Dynamik in Flüssigkeiten auf Verkehrssimulationen zu übertragen und so die Vorgänge in Straßennetzwerken verschiedener Längen und Kapazitäten zu simulieren. Die Parameter der zu Grunde liegenden Gleichungen werden dabei so kalibriert, daß die realen, empirisch gewonnenen Verkehrsdaten angenähert werden. Da in dieser Arbeit ein mikroskopischer Ansatz gewählt worden ist, werden wir diese Herangehensweise nicht tiefgründiger erläutern.

Mesoskopische Modelle, als Zwischenform zwischen makroskopischer und mikroskopischer Simulation, simulieren das Verhalten von Gruppen von Fahrzeugen. Es gibt Modelle, die ebenfalls auf gas-kinetischen Zusammenhängen aufbauen. Im Rahmen dieser Dokumentation soll jedoch auch auf diese Ansätze nicht näher eingegangen werden. Dem interessierten Leser seien aber einige Veröffentlichungen nahegelegt, die die Entwicklungen im Bereich der Verkehrsforschung zusammenfassen [8, 16].

Die Mehrzahl der Verkehrsmodelle, die heutzutage entwickelt werden, um eine adäquate Simulation von Verkehrssituationen zu erhalten, sind mikroskopisch, d.h.: das Verhalten eines jeden einzelnen Fahrzeuges wird simuliert. Da unser Modell ebenfalls in diese Kategorie gehört, soll diesen Modellen besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

### 1.3 Mikroskopische Simulation und Differentialgleichungen

Mikroskopische Modelle beschreiben das Verhalten eines jeden einzelnen Fahrzeuges. Dieses Verhalten ist durch Regeln bestimmt, die vorschreiben wie sich das Fahrzeug in bestimmten Situationen verhalten soll. Solche Regeln beziehen sich beispielsweise auf Überhohlmanöver bzw. Fahrbahnwechsel, allem voran jedoch darauf, wie sich das Fahrzeug im Bezug zu seinem Vordermann (bzw. Vordermännern) verhält. Es ist dabei Aufgabe der Modellentwicklung, die Regeln so festzulegen, daß die realen Verhältnisse wiedergespiegelt werden, ohne das Modell zu komplex zu gestalten, da dies wiederum die Analyse erschwert. In einer mikroskopischen Simulation werden nun viele solcher Einzelfahrzeuge auf eine Strecke gesandt, um das Verhalten des Gesamtsystems zu analysieren.

Die ersten und einfachsten mikroskopischen Modelle sind die sogenannten „Car-Following-Modelle“, bzw. „Follow-the-Leader-Modelle“. Das Verhalten jedes einzelnen Fahrzeuges hängt ausschließlich von dem Zustand seines Vordermanns ab. In der Arbeit von J. P. Schnei-

---

<sup>2</sup>Die Leistungen von D. Helbing und seiner Gruppe (Institut für Wirtschaft und Verkehr, TU Dresden) im Bereich der Verkehrsanalyse und -simulation sind sehr beachtlich und es gibt eine Vielzahl an interessanten Arbeiten zu finden [24].

der [18] im Jahre 1953, die eine der ersten Arbeiten auf dem Gebiet überhaupt darstellt, wird die Beschleunigung  $\ddot{x}_n$  des  $n$ -ten Fahrzeugs beispielsweise durch

$$\ddot{x}_n = \frac{1}{T}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1}), n = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

gegeben, wobei  $T$  eine Zeitkonstante ist, die in der angesprochenen Publikation auf eine Sekunde festgesetzt wird, und  $N$  die Anzahl der zu simulierenden Fahrzeuge repräsentiert. Das bedeutet, daß das Fahrzeug proportional zu dem Geschwindigkeitsunterschied zwischen sich und seinem Vordermann beschleunigt.

Anhand dieser Gleichung ist sicherlich bereits zu erkennen, weshalb dieser Abschnitt mit „Mikroskopische Simulation und *Differentialgleichungen*“ überschrieben ist, denn alle mikroskopischen Modelle, die in der Literatur zu finden sind, resultieren in Differentialgleichungen bzw. Differentialgleichungssysteme. Es ist sicher auch einleuchtend, daß es sich so verhält. Denn das Verhalten eines Fahrzeugen über einen gewissen Zeitraum ist bestimmt durch die Bewegungsgrößen Position  $x$ , Geschwindigkeit  $v = \dot{x}$  und Beschleunigung  $a = \ddot{x}$ . Da die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit ist, und diese wiederum die Ableitung des Ortes (sprich, der Position), resultieren dynamische Prozesse dieser Art in Differentialgleichungen.

Eine Weiterentwicklung dieser einfachen Modelle (Gleichung 2) stellen die sogenannten „Optimal-Velocity-Modelle“ (OVM) dar. Diese Modelle wurden von M. Bando und Kollegen 1994 bzw. 1995 eingeführt<sup>3</sup>. Die Beschleunigung  $\ddot{x}_n$  des Fahrzeuges  $n$  ist dabei gegeben durch

$$\ddot{x}_n = \alpha [V(x_{n+1} - x_n) - \dot{x}_n], n = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Die Funktion  $V(x_{n+1} - x_n) = V(\Delta x_n)$  wird häufig mit „Optimal-Velocity-Funktion“ (OVF) benannt, denn sie ordnet jedem Abstand  $x_{n+1} - x_n$  eine erwünschte optimale Geschwindigkeit zu. Diese Geschwindigkeit wird dann mit der aktuellen Geschwindigkeit  $\dot{x}_n$  verglichen, um die Beschleunigung  $\ddot{x}_n$  zu ermitteln. Die Beschleunigung wird dann mit einem konstanten Faktor  $\alpha$  multipliziert, der von den Autoren oft als die Sensibilität des Fahrers interpretiert wurde.

Das OVM wurde in den letzten Jahren sehr viel diskutiert, erweitert und weiter verbessert. Diese Diskussion behandelte vor allem die OVF zur Ermittlung der optimalen Geschwindigkeit relativ zum Abstand des Vordermanns [17]. Des Weiteren wurden Reaktionszeiten der Fahrer [15, 2], die Einbeziehung mehrerer Vordermänner [23], Überholvorgänge [21, 11], etc. erfolgreich in ein solches Modell integriert. Es ist dabei allerdings zu bemerken, daß die steigende Komplexität dieser Modelle kaum eine analytische Betrachtung zuläßt, und die Untersuchungen ausschließlich numerisch vorgenommen wurden.

Dies ist ein wichtiger Punkt. Denn generell sind Erkenntnisse, die auf analytischem Wege erlangt wurden, „sicherer“ und deshalb auch weniger angreifbar als Erkenntnisse, die

---

<sup>3</sup>Die entsprechenden Veröffentlichungen standen uns leider nicht zur Verfügung. Allerdings beziehen sich alle nachfolgenden Arbeiten, die mit einem OVM arbeiten, auf die Arbeiten der Gruppe um Masako Bando.

mit Hilfe von numerischen Simulationen gewonnen werden. Dabei können nämlich durchaus Effekte auftreten, die nicht von dem simulierten System herrühren, sondern durch das numerische Verfahren verursacht werden, und es ist somit notwendig, genau zu überprüfen, wodurch welche Effekte erzeugt werden. Der beste Weg einer solchen Überprüfung ist es natürlich, die zu simulierende Verkehrssituation analytisch zu untersuchen, da dies aber nicht immer möglich sein wird, ist doch zumindest eine intensive analytische Untersuchung des numerischen Verfahrens anzuraten. In dieser Arbeit wollen wir jedoch versuchen, neben numerischen Aussagen auch zu analytischen Ergebnissen, die Verkehrssituation an sich betreffend, zu gelangen.

Um die Komplexität des zu untersuchenden Systems zu reduzieren, wurde deshalb in den meisten mikroskopischen Modellen zunächst eine Kreisbahn als Fahrstrecke gewählt. Dies gilt insbesondere für jene Untersuchungen, die eine analytische Lösung des resultierenden Systems versuchen, bzw. zu allgemeinen qualitativen Aussagen (z.B. über das Langzeitverhalten des Systems) gelangen wollen [14, 2]. In diesen Fällen wurde als weitere Vereinfachung vorgeschlagen, das Verhalten der einzelnen Fahrzeuge, bis auf eine gewisse Zeitverzögerung, als gleich anzunehmen. Die Zeitverzögerung wird dabei durch die sogenannte „backward propagation velocity“ bestimmt, eine Geschwindigkeit, die aussagt wie weit gleiche Zustände zweier aufeinanderfolgender Fahrzeuge auseinanderliegen. In dieser Arbeit werden wir auf die letztgenannte Vereinfachung verzichten. Wir werden als Fahrstrecke allerdings zunächst „einfache“ Topologien wählen: die Kreisbahn und eine gerade Strecke endlicher Länge.

## 1.4 Dynamische Systeme

Um in einem komplexen System, bestimmt durch Differentialgleichungen, zu analytischen Aussagen zu gelangen, bietet sich die Theorie der *dynamischen Systeme* an. Dies wird um so einleuchtender, schaut man sich die letzten Entwicklungen in der mikroskopischen Verkehrsforschung an [14, 2, 15]. In den hier genannten Beispielen spielt die Suche nach Bifurkationspunkten (des dynamische Systems<sup>4</sup>) eine wichtige Rolle. Bifurkationspunkte sind Parameterkonfigurationen, bei denen sich das Verhalten eines parameterabhängigen dynamischen Systems qualitativ ändert, d.h. z.B., daß das System von periodischen Verhalten plötzlich in nicht-periodisches Verhalten „springt“. Diese Entwicklungen auf dem Gebiet der Verkehrsforschung legen es nahe, die Theorie dynamischer Systeme zur analytischen Untersuchung von mikroskopischen Verkehrsmodellen heranzuziehen.

Die Theorie dynamischer Systeme kann als eine allgemeine Theorie zeitveränderlicher und bestimmten Regeln gehorchender Prozesse oder Systeme angesehen werden. Dieses Konzept schließt somit sowohl die Newtonsche Mechanik<sup>5</sup> sowie weitere zeitveränderliche physikalische Systeme ein, als auch biologische Prozesse wie z.B. natürliche Wachstumsprozesse oder Populationsentwicklung. Wir werden sehen, daß sich dieses Konzept auch im Bereich der Verkehrsforschung anwenden läßt.

---

<sup>4</sup>Die Autoren beider Veröffentlichungen beziehen sich nicht ausdrücklich auf dynamische Systeme.

<sup>5</sup>Eigentlich hat das Konzept des dynamischen Systems seinen Ursprung in der Newtonschen Mechanik.

Dynamische Systeme können durchaus verschiedenartig definiert werden. Wir wollen bei unserer Definition dem Buch „Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems“ von Gerald Teschl<sup>6</sup> folgen. Demnach ist ein dynamisches System eine Halbgruppe  $G$ , die auf einem Raum  $M$  ausgeführt wird. Es gibt also eine Relation

$$T : G \times M \rightarrow M, \quad (4)$$

welche einem Paar  $(g, x) \in G \times M$  ein Element  $T_g(x) \in M$  zuordnet. Dabei soll

$$T_g(x) \circ T_h(x) = T_{g \circ h}(x) \quad (5)$$

gelten. Falls  $G = \mathbb{R}^+$  oder  $G = \mathbb{R}$ , dann handelt es sich um ein *kontinuierliches* dynamisches System und wenn andernfalls  $G = \mathbb{N}_0$  oder  $G = \mathbb{Z}$ , dann sprechen wir von einem *diskreten* dynamischen System. In dieser Arbeit werden wir versuchen ein mikroskopisches Verkehrsmodell zu entwickeln, welches sich als diskretes dynamisches System darstellen und behandeln läßt.

## 1.5 Eine Vorschau

Der verbleibende Teil dieser Dokumentation ist in drei Hauptabschnitte unterteilt, die jeweils ein Kapitel darstellen. Im zweiten Kapitel wird detailliert auf die Entwicklung des dieser Arbeit zugrunde liegenden, mikroskopischen Verkehrsmodells eingegangen. Es wird zunächst ein „intuitives“ Modell erläutert, um im Folgenden zu einem Basismodell für verschiedene Untersuchungen zu gelangen. Abgeschlossen wird dieses Kapitel mit dem Vorschlag eines generellen Verkehrsmodells.

Kapitel 3 ist nochmals in zwei Hauptabschnitte unterteilt. Dort wird zunächst (in Abschnitt 3.1) auf die numerische Simulation und das dazu gehörende Simulationsprogramm eingegangen. Im zweiten Teil (Abschnitt 3.2) wird die im Rahmen dieses Projektes unternommene, analytische Betrachtung beschrieben. Dabei wird, als elementarer Bestandteil dieser Arbeit, als erstes die Formulierung des Verkehrssystems als diskretes System vorgenommen, um dieses dann näher zu beleuchten.

Das letzte Kapitel hat in erster Linie eine resümierende Funktion. Es wird aber auch skizziert, was für die zukünftige Entwicklung des Projektes interessant sein wird.

---

<sup>6</sup>Es ist überaus positiv hervorzuheben, daß Gerald Teschl dieses Buch online, frei zugänglich zur Verfügung stellt.



## 2 Modellentwicklung

Um die Problematik der Verkehrssimulation besser zu verstehen, wollten wir uns nicht nur auf die schon existierenden Modelle stützen, sondern auch selbst Überlegungen anstellen, wie das Fahrverhalten eines Auto, bzw. das Verhalten eines Autofahrers, mathematisch formuliert werden kann. Natürlich benutzten wir dabei als ersten Anhaltspunkt die Modelle, die in der Literatur zu finden waren, in erster Linie das OV-Modell und seine Varianten. Wichtiger sollte es jedoch sein, das individuelle Verhalten des Fahrers, so abzubilden, wie es in der Realität vonstatten geht. Es war daher in erster Linie gedacht, das Modell daran zu messen, wie realgetreu es die Interaktionen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Fahrzeugen darstellt und weniger, wie das sonst oft bei mikroskopischen Modellen gemacht wurde, das Modell anhand globaler, realer Verkehrsdaten, unter Einbeziehung einer großen Anzahl von Fahrzeugen, zu kalibrieren. Letztgenanntes ist natürlich ebenfalls äußerst wichtig, es wird von uns allerdings als der richtige Weg angesehen, als erstes die Auto-Auto-Interaktion den realen Gegebenheiten möglichst getreu anzupassen, denn dies, einmal gut modelliert, führt unserer Meinung nach zu einer Gesamtsimulation (vieler Autos), die auch globale Effekte getreu widerspiegelt.

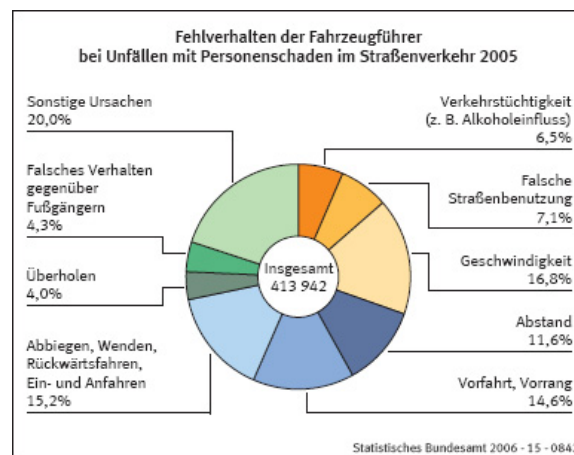


Abbildung 2: „Fehlverhalten der Fahrzeugführer bei Unfällen mit Personenschaden im Straßenverkehr 2005“ des statistischen Bundesamtes Deutschland [25]

Ein wichtiger Anhaltspunkt bei der Modellierung des Verhaltens eines Autos im Bezug zu seinem Vordermann war die Abstandsempfehlung „Abstand = Tacho halbe“, die in den letzten Jahren verstärkt propagiert wurde, um die Unfälle zu reduzieren, die auf zu geringe Abstände zwischen zwei Fahrzeugen zurückzuführen sind. Man findet entsprechende Hinweisschilder mit dem Aufdruck der Faustregel „Abstand = Tacho halbe“ mittlerweile sogar auf Autobahnen. Die Grafik „Fehlverhalten der Fahrzeugführer bei Unfällen mit Personenschaden im Straßenverkehr 2005“ des statistischen Bundesamtes Deutschland zeigt auf, daß

falscher Abstand immer noch eine der großen Ursachen für Unfälle darstellt. Zusammengekommen mit Unfällen, die auf falsche (zu hohe) Geschwindigkeit zurückzuführen sind, ein Faktor, der ebenfalls von unserem Modell in Augenschein genommen werden wird, da es sich bei der Faustregel um eine Geschwindigkeits–Abstands–Relation handelt, ist es der größte Anteil an Unfallursachen, auf den wir mit unserem Modell eingehen wollen.

Das Ziel unseres Modells ist es also, zu veranlassen, daß jedes einzelne Auto versucht, einen Abstand zum Vordermann herzustellen, der der Hälfte des Betrages seiner Geschwindigkeit entspricht (z.B. 50m bei 100km/h). Des Weiteren werden von dem Modell auch physikalisch–mechanische Beschränkungen, wie Maximalgeschwindigkeiten, Maximalbeschleunigungen und maximale Bremsleistungen (Minimalbeschleunigung) einbezogen. Das wird dazu führen, daß mit dem vorgeschlagenem Modell (Auffahr)Unfälle nicht ausgeschlossen werden (z.B., weil die maximale Bremsleistung überschritten werden müßte, um den Unfall noch zu verhindern.), was in den meisten mikroskopischen Ansätzen bisher der Fall ist. Unserer Meinung nach ist ein Ausschluß solcher Fälle nicht sinnvoll für eine realistische Verkehrssimulation.

## 2.1 Physikalisch–Mechanische Beschränkungen

Um die Verkehrssimulation so wirklichkeitsnahe wie möglich zu gestalten, haben die Autos mechanische und physikalische Grenzen, die sie nicht überschreiten. So ist ein realistisches Verhalten gegeben. Dementsprechend befinden sich in unserem dynamischen System  $N$  Autos auf einer Strecke der Länge  $L$ , wobei die Fahrzeuge eine festgelegte, physische *Maximalgeschwindigkeit*,  $v_{max}$  besitzen und nach belieben auf der Strecke positioniert werden können. Die Beschleunigungsgrenzen, *Maximalbeschleunigung*  $a_{max}$  und *Minimalbeschleunigung*  $a_{min}$ , werden entweder nach Wahl, abhängig von der Geschwindigkeit, individuell oder unabhängig davon per Zufall bestimmt. Dabei ist die positive Beschleunigung nicht größer als  $4\frac{m}{s^2}$  und die negative nicht kleiner als  $-8\frac{m}{s^2}$ , um den gegebenen Bedingung in der Realität zu entsprechen.

## 2.2 Intuitive Herangehensweise

Die Fahrzeuge in unserem System verhalten sich abhängig von dem Abstand zum Vordermann  $\Delta x$  und der Geschwindigkeit  $v$ , sowie dem Verhältnis der eigenen Geschwindigkeit unterschiedlich. Entsprechend dieser Werte wird die Beschleunigung mit Hilfe mehrerer Modellmöglichkeiten ausgerechnet. Einige unserer Modelle wurden intuitiv entwickelt, bei anderen spielen Faktoren eine wichtige Rolle, die je nach Typ individuell eingestellt werden können und so das Verhalten der Autofahrer simulieren. Dies ist einerseits das Fahrverhalten, was sich durch das Aufschließen zum nächsten Auto und damit das Abbremsen bzw. Beschleunigen auszeichnet und andererseits die Größe des Abstands zum Vordermann.

Bei dem ersten Modell (siehe Grafik 3) wird die Geschwindigkeit eines Autos anhand einer Funktion berechnet, die je nach Abstand zum Vordermann die Geschwindigkeit er-

mittelt. Ist also der Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug 100m oder größer,  $\Delta x \geq 100$ ,

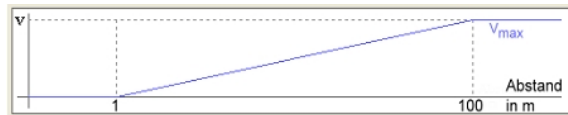


Abbildung 3: Funktion zur Bestimmung von  $v$  in Abhängigkeit vom Abstand  $\Delta x$ .

nimmt der Wagen die maximale Geschwindigkeit an, bei einem Abstand kleiner als 1,  $\Delta x < 1$ , soll es anhalten, und ist der Abstand indessen im Bereich von 1 und 100m, wird das Tempo durch  $\frac{v_{max}(\Delta x - 1)}{99}$  bestimmt.

$$v = \begin{cases} v_{max} & \Delta x > 100 \\ \frac{v_{max}(\Delta x - 1)}{99} & 1 \leq \Delta x \leq 100 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

Die Abstandswerte, bei denen die Funktion greift, sind Erfahrungswerte und der Realität nachempfunden. Trotz alledem bremsen die Autos mit diesem Modell in der Regel zu früh und halten so einen zu großen Abstand ein. Dies liegt im Grunde daran, daß die Eigengeschwindigkeit, mit der sich die Fahrzeuge fortbewegen, noch nicht mit einbezogen wird. Die Geschwindigkeit wird lediglich dem Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug angepasst, d.h. je kleiner der Abstand ist, desto kleiner ist die Geschwindigkeit.

Im Gegensatz dazu ist beim zweiten Modell das Tempo abhängig von der Eigengeschwindigkeit  $v_i$  und dem Abstand. Hier gilt das Prinzip: „Abstand = Tacho halbe“. Das bedeutet, daß ein Fahrzeug möglichst den Abstand einhalten soll, der der Hälfte der aktuell gefahrenen Geschwindigkeit in km/h entspricht. Dies wird durch die Funktion

$$a = \begin{cases} a_{max} & \frac{(v_i * 3.6)}{2} \xi \leq \Delta x \\ \frac{a_{min}(v_i - v_{i+1})}{60} & \frac{(v_i * 3.6)}{2} \xi \geq \Delta x \end{cases} \quad (7)$$

ermöglicht, wobei  $v_i$  die Eigengeschwindigkeit,  $v_{i+1}$  die Geschwindigkeit des Vordermanns und  $\xi = s$  der Faktor Sekunde ist. Dieser ist nötig, damit die Einheiten zu dem Verhältnis Geschwindigkeit zu Abstand übereinstimmen. Die Zahl 60 unter dem Bruchstrich ergibt sich dabei durch den maximal möglichen Geschwindigkeitsunterschied  $v_i - v_{i+1}$  in m/s.

Allerdings weist diese Funktion, speziell der Term  $\frac{a_{min}(v_i - v_{i+1})}{60}$ , noch einige Mängel auf. Da hier nur der Geschwindigkeitsunterschied über die Stärke der Bremskraft entscheidet, kann es passieren, daß ein Auto, welches geringfügig schneller ist als der Vorgänger, auf ein anderes auffährt, obwohl der Abstand ausreichen würde, um zum Stehen zu kommen. In

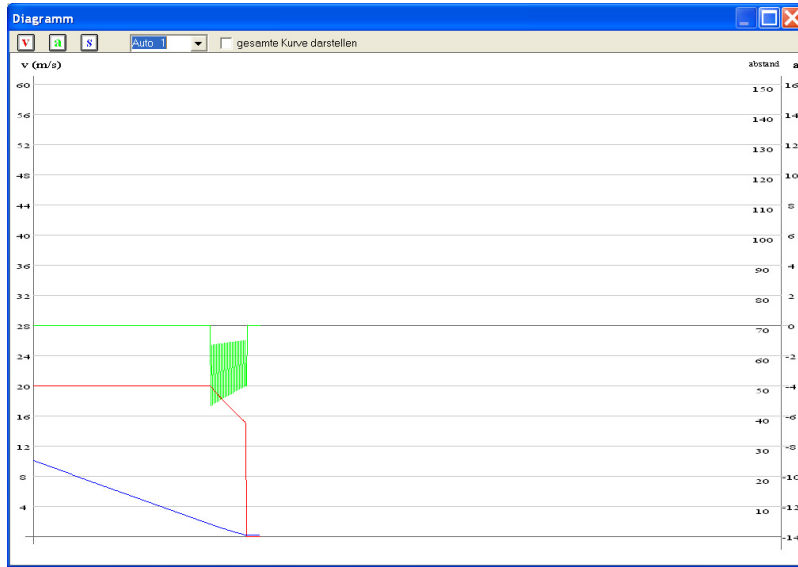


Abbildung 4: Modell2: Das Simulationsdiagramm zeigt einen vermeidbaren Unfall. (Geschwindigkeit in rot, Beschleunigung in grün, Abstand zum Vordermann in blau)

Abbildung 4 sieht man dieses Verhalten und dementsprechend den Unfall, weil nicht stark genug abgebremst wird.

Abhilfe schafft hier, die Veränderung

$$\frac{a_{min}(v_i - v_{i+1})}{60} = \begin{cases} a_{min} & \frac{v_i^2}{2a} \leq \Delta x \\ \frac{a_{min}(v_i - v_{i+1})}{60} & sonst \end{cases} \quad (8)$$

Nun wird maximal verzögert, wenn der Bremsweg  $\frac{v_i^2}{2a}$  mit der aktuellen Beschleunigung  $a$  und der aktuellen Geschwindigkeit  $v_i$  nicht ausreicht, um zu stoppen.

So sieht nun das gleiche Beispiel mit 8 aus (Bild 5). Das Auto kommt rechtzeitig zum stehen, da nun zur richtigen Zeit ausreichend stark verzögert wird.



Abbildung 5: Verändertes Modell2: Das Auto bremst stärker als zuvor und schafft es den Unfall zu verhindern.

### 2.3 Das „Optimal–Distance–Modell“ als Basismodell

Ausgehend von den Überlegungen der letzten Sektion gilt es nun zu überlegen, wie die Beziehung „Abstand = Tacho halbe“  $\Delta x = \frac{v}{2}$  in Form einer Differentialgleichung

$$\ddot{x}_i = f(\Delta x_i, \dot{x}_i) \quad (9)$$

dargestellt werden kann, wobei  $\dot{x}_i = v_i$  gilt. Man beachte, daß der Index  $i = 0, 1, \dots, N$  in Gleichung 9 das jeweilige Auto  $i$  spezifiziert und daß  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  der Abstand des Autos  $i$  zu seinem Vordermann, Auto  $i + 1$ , ist.

Die prinzipielle Frage ist nun: Wie muß die Geschwindigkeit<sup>7</sup> verändert werden, damit sich das Auto der Funktion  $\Delta x = \frac{\tilde{v}}{2}$  nähert? Die Beziehung von  $\Delta x_i$  und  $\tilde{v}_i$  ist in Abbildung 6 dargestellt. Wir beachten zunächst nur die Grafik auf der linken Seite. Diese zeigt die lineare Funktion  $\tilde{v}_i^{opt}(t_k) = 2\Delta x(t_k)$ , die jedem Abstand  $\Delta x$  genau die Geschwindigkeit  $\tilde{v}_i^{opt}$  zuordnet, die das gewünschte Geschwindigkeits–Abstands–Verhältnis herstellt, und einen Punkt  $(\Delta x_i(t_k), \tilde{v}_i(t_k))$  im Raum  $\Delta x \times \tilde{v}$ , der dem realen Zustand eines Autos zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_k$  entspricht. Des Weiteren ist der Punkt eingezeichnet, der dem Wunschzustand entspricht, d.h. der Punkt, bei dem die Beziehung „Abstand = Tacho halbe“ erfüllt wäre. Um vom realen Zustand  $(\Delta x_i(t_k), \tilde{v}_i(t_k))$  zum Wunschzustand zu gelan-

<sup>7</sup>Die Geschwindigkeit  $\tilde{v}$  liegt in km/h vor. Wir werden an geeigneter Stelle schildern, wie wir die physikalischen Konsistenz erreichen. Im Folgenden werden  $\tilde{v}$  schreiben, wenn die Geschwindigkeit in km/h gemeint ist.

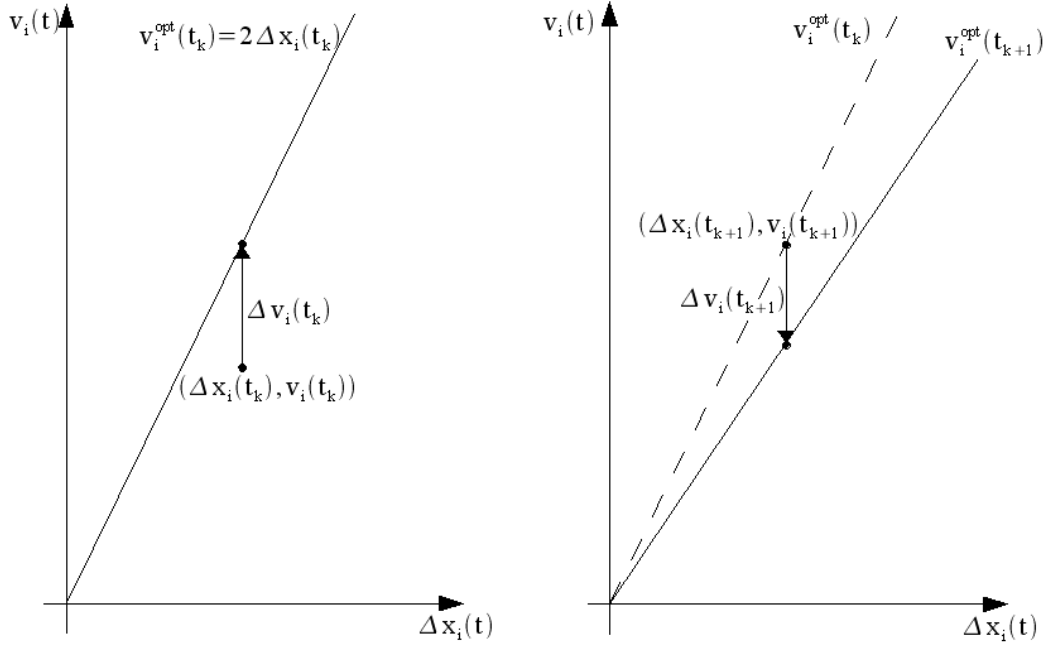


Abbildung 6: Grafische Darstellung der Beziehung  $\Delta x = \frac{\tilde{v}}{2}$  zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten.

gen, müßte die Geschwindigkeitsveränderung  $\Delta v_i(t_k)$  ausgeführt werden. Der Vektor, der diese Veränderung repräsentiert ist ebenfalls visualisiert. Die gewünschte Beschleunigung  $\Delta v_i(t_k) = a_i(t_k) = \ddot{x}_i(t_k)$  des Autos  $i$  wird demzufolge durch

$$\ddot{x}_i(t) = \Delta v_i(t_k) = \tilde{v}_i^{opt}(t) - \tilde{v}_i(t) = 2(x_{i+1} - x_i) - \tilde{v}_i(t) \quad (10)$$

gegeben.

Man muß dabei aber nun beachten, daß  $\Delta x_i(t)$  und  $\tilde{v}_i(t)$  natürlich zeitveränderliche Größen sind. Demzufolge ist selbstverständlich auch  $\tilde{v}_i^{opt}(t)$  veränderlich in der Zeit. Insbesondere ist  $\tilde{v}_i^{opt}(t)$  aber abhängig von der jeweils vollzogenen Geschwindigkeitsveränderung zum vorherigen Zeitpunkt. Diese Wechselwirkungen versucht die Abbildung 6 zu verdeutlichen, indem sie zwei aufeinanderfolgende Simulationsschritte<sup>8</sup> zeigt. Die vollzogene Veränderung zur Zeit  $t_k$  führt zu einer Veränderung von  $\Delta x_i(t_{k+1})$  im nächsten Zeitpunkt  $t_{k+1}$  und somit auch zu einer Veränderung der Kurve  $\tilde{v}_i^{opt}(t_{k+1}) = 2\Delta x(t_{k+1})$ . Aufgrund dieser

<sup>8</sup>Da man in Computersimulationen immer eine Diskretisierung (hier in der Zeit) vornehmen muß, sprechen wir an dieser Stelle von Simulationsschritten. Auf das Konzept der Zeitdiskretisierung wird im Abschnitt 3.2 noch gesondert eingegangen.

Überlegung wurde Gleichung 10 folgendermaßen erweitert:

$$\ddot{x}_i(t) = \alpha' [2(x_{i+1} - x_i) - \tilde{v}_i(t)]. \quad (11)$$

Geometrisch bedeutet das, daß wir um den Betrag  $\alpha'$  entlang dem Vektor  $\Delta v(t)$  bewegen.

Es ist leicht einzusehen, daß das durch diese Überlegungen hergeleitete Modell dem OV-Modell (siehe Gleichung 3) mit einer linearen OV-Funktion entspricht. Man könnte es aber, die Herleitungsidee im Hinterkopf behaltend, auch als „*Optimal-Distance-Modell*“ (*OD-Modell*) bezeichnen. Wir werden im Folgenden diesen Begriff benutzen.

Beziehen wir nun die in Abschnitt 2.1 behandelten mechanisch-physikalischen Beschränkungen mit ein, erhalten wir

$$\ddot{x}_i(t) = \begin{cases} a_{max} \\ \alpha' [2(x_{i+1} - x_i) - \tilde{v}_i(t)] \\ a_{min} \end{cases} . \quad (12)$$

Basierend auf einer Parameterstudie zur Feststellung des Wirkungsbereichs (und generell zum besseren Verständnis), wurde das Modell noch ein wenig verändert, hält allerdings nach wie vor die Beziehung  $\Delta x = \frac{\tilde{v}}{2}$  inne. Mit  $\alpha = \frac{\alpha'}{2}$  kann Gleichung 12 nämlich als

$$\ddot{x}_i(t) = \begin{cases} a_{max} \\ \alpha \left[ (x_{i+1} - x_i) - \frac{\tilde{v}_i(t)}{2} \right] \\ a_{min} \end{cases} \quad (13)$$

geschrieben werden, was eine günstigere Parameterrauflösung in  $\alpha$  zur Folge hat, da die Maximalwerte ( $a_{max}, a_{min}$ ) erst bei dem doppelten Parameterwert erreicht werden. Diese Überlegungen zum Wirkungsbereich seien an dieser Stelle etwas genauer erläutert.

Zur Feststellung des Wirkungsbereichs, d.h., des Bereiches in dem die Beschleunigung  $a = \alpha \left[ \Delta x - \frac{\tilde{v}}{2} \right]$  die mechanische Grenze  $a_{max}$ , bzw.  $a_{min}$ , nicht übersteigt, bzw. nicht darunter liegt (d.h.  $a_{min} < a < a_{max}$ ), wurde ein Fallbeispiel konstruiert. Anhand dieses Beispiels wurde untersucht, in welchem Abstandsbereich, in Abhängigkeit von der Gewichtung  $\alpha$ , das Modell wirkt, bzw. wann die maximale oder minimale Beschleunigung herangezogen wird. Es wurde dabei eine Geschwindigkeit von 100 km/h angenommen, was einen optimalen Abstand von 50m bedeutet. Für  $a_{max}$  und  $a_{min}$  wurden die Werte 10 bzw.  $-10 \text{ m/s}^2$  angenommen. Diese Werte liegen ein wenig über den in der Realität gegebenen Beschleunigungs- Abbildung 7 stellt den Wirkungsbereich für dieses Beispiel grafisch dar.

Die Kurven, die hier visualisiert wurden, ergeben sich durch die Umformung der Modellgleichung 13 zu

$$\Delta x = \frac{\tilde{a}}{\alpha} + \frac{\tilde{v}}{2} \quad (14)$$

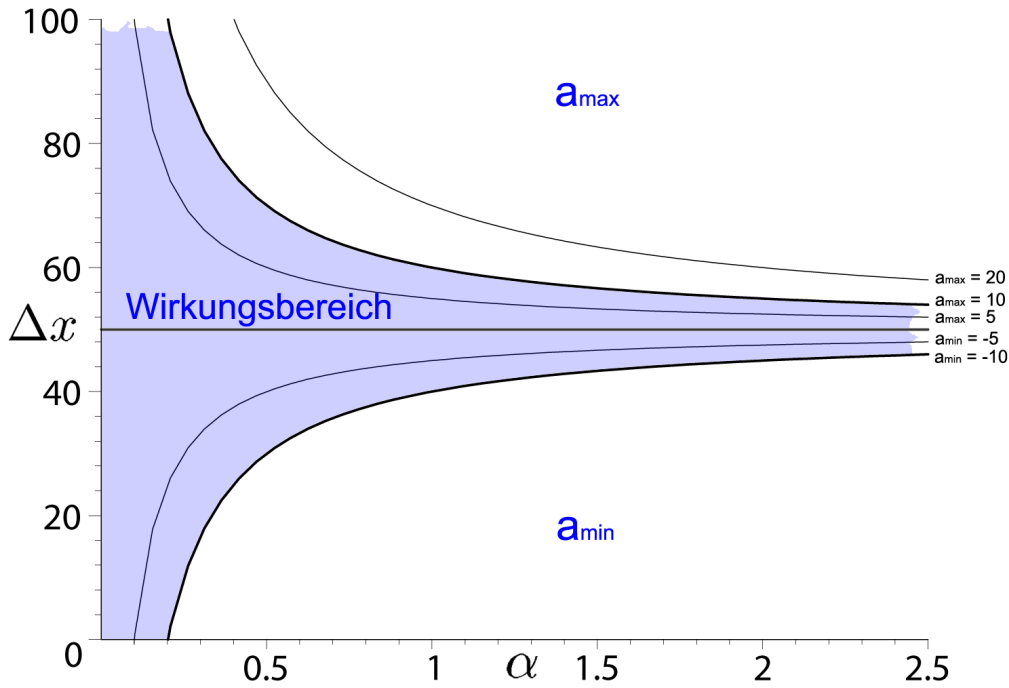


Abbildung 7: Grafische Darstellung des Wirkungsbereichs des Modells 13 bei einer angenommenen Geschwindigkeit  $\tilde{v} = 100 \text{ km/h}$ . Die Grafik setzt den Abstand  $\Delta x$  in Beziehung mit dem freien Parameter  $\alpha$ . Der Bereich zwischen den Kurven  $a_{max} = 5$  und  $a_{min} = -5$  repräsentiert gleichzeitig den Wirkungsbereich, der mit Modell 12 (bei  $a_{max} = 10, a_{min} = -10$ ) erzielt würde.

und durch Einsetzen der entsprechenden Werte  $\tilde{a} = a_{max}$  bzw.  $\tilde{a} = a_{min}$ . Das Hauptaugenmerk in Abbildung 7 richten wir zunächst auf die dick gezeichneten Kurven, die unser Fallbeispiel repräsentieren. Die obere Kurve zeigt an, bei welchem Abstand (in Abhängigkeit von  $\alpha$ ) die Maximalbeschleunigung erreicht wird und die untere stellt die Konstellationen  $(\Delta x, \alpha)$  dar, bei denen  $a_{min}$  erreicht wird. Zwischen beiden Kurven, hier hellblau eingefärbt, befindet sich also der Wirkungsbereich des Modells. Da in unserem Fall  $|a_{max}| = |a_{min}|$  sind die Kurven symmetrisch in Bezug zu der Horizontalen  $\Delta x = \frac{\tilde{v}}{2} = 50$ . Diese Kurve, die ebenfalls visualisiert ist, stellt zugleich die Asymptote der Wirkungskurven dar, d.h:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[ \frac{\tilde{a}}{\alpha} + \frac{\tilde{v}}{2} \right] = \frac{\tilde{v}}{2}. \quad (15)$$

Dies bedeutet eine Verkleinerung des Wirkungsbereichs bei wachsendem  $\alpha$ .



Im Speziellen sehen wir, daß bereits bei  $\alpha = 1$  das Modell nur bei  $40m \leq \Delta x \leq 60m$  wirkt, was, bildlich gesprochen, einer Vollbremsung bei einem Abstand von 40m und Vollgas bei einem Abstand von 60m entspricht. Wir haben uns deshalb bei unseren Untersuchungen auf den Wertebereich  $\alpha \in (0, 1]$  beschränkt, da dies unserer Meinung nach den Bereich des realen Verhaltens verschiedener Autofahrer nahekommt.

Außerdem macht diese Untersuchung klar, weshalb die Gewichtung in früheren OV-Modellen als Sensibilitätswert interpretiert wurde, den es ist möglich mit Hilfe dieses Parameters, die individuelle Sensibilität eines Fahrers gegenüber Abstandsveränderungen zu steuern.

Wir haben in der bisherigen Argumentation angenommen, daß die Faustregel „Abstand = Tacho halbe“ sich auf den Geschwindigkeitswert  $\tilde{v}$  der Tachometeranzeige, der in  $km/h$  vorliegt, bezieht. Um die physikalische Konsistenz zu gewährleisten, müssen wir diesen Wert in  $m/s$  umrechnen. Dies erreichen wir, indem wir mit  $\tilde{v}^{km/h} = 3.6v^{m/s}$  dem Term  $\frac{\tilde{v}_i(t)}{2}$  in 13 durch  $\frac{9}{5}v_i(t)$  ersetzen, wobei  $v_i(t)$  nun in  $m/s$  vorliegt. Wir werden im Folgenden jedoch beide Schreibweisen,  $\frac{\tilde{v}_i(t)}{2} = \frac{9}{5}v_i(t)$ , verwenden, auch, um die Beziehung „Abstand = Tacho halbe“ in den Gleichungen sichtbar zu machen.

Das so veränderte OD-Modell

$$\ddot{x}_i(t) = \begin{cases} a_{max} \\ \alpha [(x_{i+1} - x_i) - \frac{9}{5}v_i(t)] & , i = 1, \dots, N \\ a_{min} \end{cases} \quad (16)$$

für  $N$  Verkehrsteilnehmer ist äquivalent zu 13 und bildet das *Basismodell* dieser Arbeit. Untersuchungen werden in erster Linie daran vorgenommen.

## 2.4 Modellvarianten im Simulationsprogramm und ein genereller Modellvorschlag

Um ein Verkehrssystem mit  $N$  Fahrzeugen auf verschiedene Eigenschaften zu überprüfen, wurden, zusätzlich zu den in Sektion 2.2 vorgestellten Modellen, drei Varianten des OD-Modells in das Simulationsprogramm integriert. Diese werden im Folgenden beschrieben.

Zunächst gilt es aber auf eine prinzipielle Unterscheidung aufmerksam zu machen. Im Simulationsprogramm wurden zwei Streckenvarianten implementiert: die *Kreisbahn* und die *gerade Strecke*. Bezüglich des im letzten Kapitel entwickelten Modells ist dabei jedoch lediglich zu beachten, daß auf der Kreisbahn der Vorgänger  $i = N + 1$  des letzten Fahrzeugs dem ersten Fahrzeug  $i = 1$  entspricht, daß aber ansonsten im Verhalten einzelner Fahrzeuge zueinander keine Veränderung gemacht werden muß und das Modell 16 unverändert gilt. Auf der Geraden muß eine solche Anpassung nicht vorgenommen werden, so daß sich das erste Fahrzeug unabhängig von allen anderen Fahrzeugen bewegt.

Das erste Modell<sup>9</sup> auf Basis des OD-Modells, genannt ODM1, wird durch

$$\ddot{x}_i(t) = \alpha \left[ (x_{i+1} - x_i) - \beta \frac{\tilde{v}_i(t)}{2} \right], i = 1, \dots, N \quad (17)$$

beschrieben. Es gilt zu beachten, daß aus Platzgründen die mechanisch-physikalischen Beschränkungen nicht mit aufgeführt wurden. In dem Modell wurde ein weiterer Parameter  $\beta$  hinzugefügt und 17 stimmt mit dem Basismodell 16 überein, wenn  $\beta = 1$ . Dieser Parameter kann als Regler der optimalen Distanz (des gewünschten Abstands) interpretiert werden, da bei  $\beta < 1$  ein Wunschabstand  $\Delta x < \frac{\tilde{v}}{2}$  simuliert wird und umgekehrt bei  $\beta > 1$  ein gewünschter Abstand  $\Delta x > \frac{\tilde{v}}{2}$ . Man kann damit beispielsweise untersuchen, ob größere Abstände zu einer geringeren Unfallrate führen oder, inwiefern geringere Abstände zu besserer Straßenauslastung beitragen können.

Die zweite und die dritte Modellvariante bezieht einen ganz neuen Faktor mit ein und bedarf einer kurzen einleitenden Erklärung. Es wurde überlegt, inwieweit das Fahrverhalten eines Fahrers neben dem Abstand  $\Delta x_i$ , der sicherlich den wichtigsten Faktor darstellt, auch durch den Geschwindigkeitsunterschied  $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$  zwischen ihm und seinem Vordermann bestimmt ist. Die Geschwindigkeit des Vordermanns  $v_{i+1}$  ist jedoch nur in Ausnahmefällen bekannt. Die *Abstandsveränderung* zwischen zwei Fahrzeugen, die mit Geschwindigkeitsunterschieden assoziiert werden kann, ist allerdings eine fühlbare Größe, welche gemäß der Fahrerfahrung der Autoren das Fahrverhalten ebenfalls wesentlich beeinflusst. Da verschiedene Methoden zur Berechnung der Abstandsveränderung (bzw. des Geschwindigkeitsunterschiedes) denkbar sind, und auch verschiedene Methoden implementiert wurden, wollen wir diese Größe zunächst allgemein mit dem Operator  $V_0$  beschreiben.

Es sind bezüglich des Abstandes und der Abstandsveränderung nun vier verschiedene Kombinationen denkbar:

1. Der Abstand ist zu klein und verkleinert sich weiter,
2. Der Abstand ist zu klein und vergrößert sich,
3. Der Abstand ist zu groß und verkleinert sich,
4. Der Abstand ist zu groß und vergrößert sich weiter.

Jeder Fall läßt nun verschiedene Reaktionen der Fahrzeugführer als sinnvoll erscheinen. Im Fall 1 sollte das Auto stark bremsen, im Fall 4 sollte das Auto (stark) beschleunigen. In den Fällen 2 und 3 ist eine sinnvollste und realitätsnahe Reaktion des Fahrers nicht so einfach festzustellen, sie sollte jedoch auf jeden Fall weniger stark ausfallen als in den anderen Fällen. Sie sollte durch eine Kombination aus „Bremsen“ bezüglich des einen Faktors und „Beschleunigen“ bezüglich des anderen Faktors gebildet werden. Dies kann mathematisch folgendermaßen formuliert werden:

$$\ddot{x}(t) = \alpha X_{\frac{\tilde{v}}{2}} + \beta V_0, \quad (18)$$

---

<sup>9</sup>Modell 4 in der Simulationsprogramm.

wobei  $X_{\frac{\bar{v}}{2}} = \Delta x - \frac{\bar{v}}{2}$  aus dem Basismodell (siehe Gleichung 16) hervorgeht und  $V_0$  so gewählt werden muß, daß die oben beschriebenen Verhältnisse widergespiegelt werden.

Das zweite Modell<sup>10</sup> auf Basis von 16, ODM2, ergibt sich mit

$$V_0(i) = \frac{\Delta x_i^k - \Delta x_i^{k-1}}{h} = \frac{(x_{i+1}^k - x_i^k) - (x_{i+1}^{k-1} - x_i^{k-1})}{h}, \quad (19)$$

welches als eine finite Differenzen Approximation des Geschwindigkeitsunterschiedes  $\Delta v_i$  interpretiert werden kann. Bei einer Abstandsveringerung ( $\Delta x_i^k < \Delta x_i^{k-1}$ ) wird  $V_0$  negativ und wirkt somit gemäß der oben formulierten Anforderungen.

Das dritte und letzte Modell<sup>11</sup>, ODM3, ist demgegenüber nur leicht verändert und ergibt sich durch

$$V_0(i) = \frac{\Delta x_i^k - \Delta x_i^{k-p}}{ph} = \frac{(x_{i+1}^k - x_i^k) - (x_{i+1}^{k-p} - x_i^{k-p})}{ph}. \quad (20)$$

Das heißt, der Autofahrer überprüft alle  $p$  Zeiteinheiten, wie sich der Abstand zu seinem Vordermann verändert hat. Es ist zu vermuten, daß dies den realen Gegebenheiten recht nahe kommt, da man als Autofahrer nur zu gewissen, weiter auseinanderliegenden Zeitpunkten eine Abstandsveränderung feststellt.

Damit wären alle während dieses Projektes implementierten Modelle vorgestellt. Ein kurzer Ausblick in Richtung eines *generellen mikroskopischen Verkehrsmodells* soll aber an dieser Stelle noch gewagt werden.

Man kann sich nämlich vorstellen, auch Beschleunigungsunterschiede bei der Regelung des Verhaltens zweier Fahrzeuge zueinander einzubeziehen. Dies erscheint vor allem deswegen einleuchtend, weil Fahrzeuge in der Realität sogar eine Vorrichtung haben, solche Veränderungen anzuzeigen: die Bremslichter. Es ist zu vermuten, daß eine angemessene Modellierung der Reaktion eines Fahrers auf das Aufleuchten der Bremslichter seines Vordermanns stark zu einer Verbesserung der Modelle beitragen kann, da dies auch in der Realität starke Wirkung hat.

Ein solches generelles Modell erhalten wir durch Einführung eines weiteren Operators  $A_0$ , der sich allgemein auf Beschleunigungsunterschiede bezieht. Wir erhalten damit

$$\ddot{x}(t) = \alpha X_{\frac{\bar{v}}{2}} + \beta V_0 + \gamma A_0 \quad (21)$$

und als allgemeine OD-Modellgleichung mit mechanisch-physikalischen Beschränkungen

$$\ddot{x}_i(t) = \begin{cases} a_{max} \\ \alpha X_{\frac{\bar{v}}{2}}(i) + \beta V_0(i) + \gamma A_0(i) \quad , i = 1, \dots, N. \\ a_{min} \end{cases} \quad (22)$$

---

<sup>10</sup>Modell 3 im Simulationsprogramm.

<sup>11</sup>Modell 5 im Simulationsprogramm.

Eine letzte notwendige Bemerkung soll diese Sektion abschließen. Bisher wurden alle Modellierungsüberlegungen vollzogen, ohne den physikalischen Hintergrund viel Beachtung zu schenken. Um physikalische Konsistenz der Modelle zu gewährleisten, werden die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  mit den physikalischen Einheiten  $[\alpha] = s^{-2}$  und  $[\beta] = s^{-1}$  assoziiert;  $\gamma$  ist einheitslos, da der zugehörige Term  $A_0(i)$  mit der Beschleunigung in Verbindung steht und bereits in  $\frac{m}{s^2}$  vorliegt. Damit ist jeder Summand von 22 ein Beschleunigungswert und auch die physikalische Konsistenz ist gesichert<sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup>Man beachte allerdings, daß  $X_{\frac{v}{2}} = \Delta x - \frac{v}{2}$ . Der Term  $\frac{v}{2}$  ist dabei jedoch als Wunschabstand (in Meter) zu interpretieren, der sich nur in unserem speziellen Fall durch die Faustregel „Abstand = Tacho halbe“ ergeben hat.

## 3 Simulation und Analyse

### 3.1 Numerische Simulation und auftretende Effekte

Das in diesem Projekt implementierte numerische Simulationsprogramm basiert auf dem semi-expliziten Euler Integrationsschema. Die Beschleunigung  $a = \ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$  wird je nach Modell unterschiedlich bestimmt. Die aktuelle Geschwindigkeit  $v(t+h) = \dot{x}(t+h)$  und der zurückgelegte Weg  $x(t+h)$  zum aktuellen Zeitpunkt  $t+h$ , wobei  $h$  die Zeitschrittgröße repräsentiert, ergibt sich durch das Schema

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t+h) &= a(t+h) = f(x(t), \dot{x}(t)) = f(x(t), v(t)) \\ \dot{x}(t+h) &= v(t+h) = v(t) + ha(t+h) \\ x(t+h) &= x(t) + hv(t+h).\end{aligned}\tag{23}$$

Zur Berechnung der aktuellen Beschleunigung  $a(t+h)$  wird demnach Information  $x(t), v(t)$  des vorhergehenden Zeitpunktes benutzt. Zur Berechnung der Geschwindigkeit  $v(t+h)$  (und der Position  $x(t+h)$ ) wird dann der jeweils schon berechnete Wert  $a(t+h)$  (und  $v(t+h)$ ) verwandt.

Da speziell die Modelle 3 bis 5 in unserer Simulation auch mit verschiedenen Parametern arbeiten, kann man hier zusammen mit wechselnden Situationen auf der Strecke, 3 verschiedene Hauptkonstellationen beobachten.

- Konstantes Verhalten (konstante Geschwindigkeit),
- Periodisches Verhalten (periodisches abbremsten bzw. beschleunigen in Form von Schwingungen),
- Aufschaukeln (Spezialfall: Stau oder Crash).

Bei konstantem Fahrverhalten reagieren alle Fahrzeuge angemessen. Man kann sagen sie verhalten sich ökonomisch richtig, da hier im allgemeinen die höchstmögliche Geschwindigkeit konstant gefahren wird. Am Beispiel der runden Strecke fahren irgendwann alle nur so schnell, wie das langsamste Auto. Nach einer gewissen Zeit kann so eine kontinuierliche Geschwindigkeit auf der Strecke gefahren werden. Alle Autos bremsen und beschleunigen rechtzeitig und in einem angemessenen Bereich, also nur so stark wie es Nötig ist, so daß der Abstand zum Vordermann stets ungefähr gleich bleibt und sich die Kurven letztendlich in einen konstanten Zustand einpegeln. Dementsprechend bleiben die Geschwindigkeits- und Abstands-Graphen nach einiger Zeit konstant. Dies zeigt die Grafik 8.

Im Fall des periodischen Verhaltens reagieren die simulierten Fahrer aggressiver. Sie beschleunigen und verzögern mehr als Nötig. Das kann einerseits auf eine zu geringe Einflussnahme der Geschwindigkeit eines Vorfahrenden beruhen oder andererseits auf das Wechselspiel zwischen Zeitpunkt und Stärke der Beschleunigung. Im Gegensatz zu dem

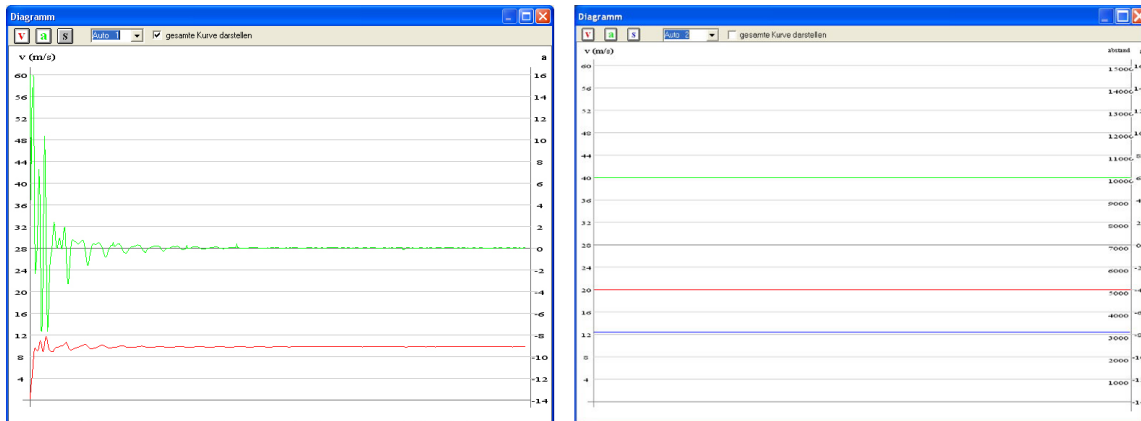


Abbildung 8: Konstantes Verhalten: (links) gedämpfte Schwingung (rechts) konstantes Verhalten

konstanten Verhalten, geraten die Autos so häufig in einen kritischen Abstand zum Vordermann und müssen dementsprechend stark abbremsen um den gemäßen Abstand zu bewahren oder gar einen Auffahrunfall zu verhindern. Allerdings müssen die dahinter fahrenden Autos im Verhältnis dann ebenfalls genauso stark bremsen um nicht zu dicht aufzufahren. Das Diagramm 9 zeigt, daß die Beschleunigungskurve in grün eine periodische Schwingung

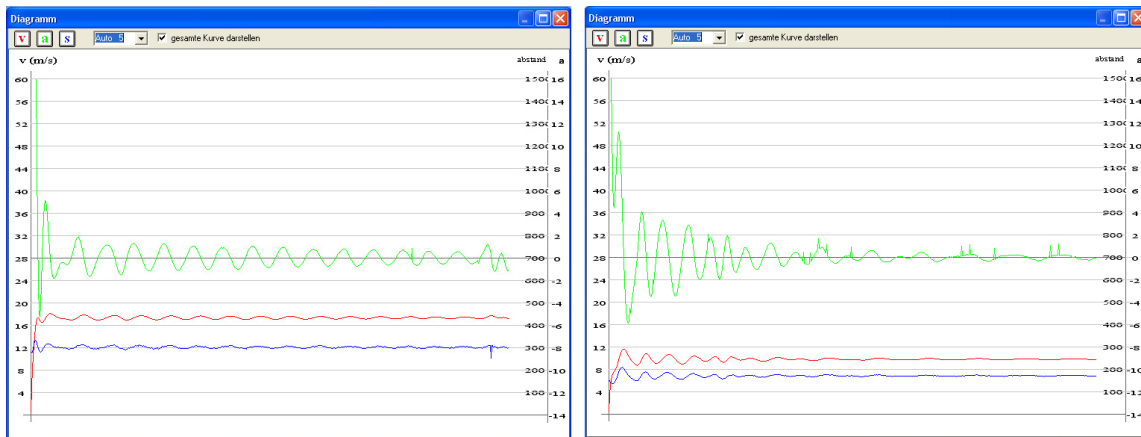


Abbildung 9: Periodisches Verhalten

aufweist. Dementsprechend oszilliert auch die rote Kurve (Geschwindigkeit), ebenso wie die des Abstandes in blau. In manchen Situationen kann die Schwingung auch gedämpft auftreten. Das bedeutet, daß die Autos früher oder später einen gleichbleibenden Abstand halten und ordnungsmäßig mit der Geschwindigkeit des Vorfahrenden hintereinander

fahren, ohne in den vorgeschriebenen Sicherheitsabstand einzudringen. In diesem Fall wäre die Beschleunigung irgendwann Null und die Wagen würden eine konstante Geschwindigkeit erreichen.

In Grenzfällen kann es aber auch zu Unfällen kommen. In dem Beispiel sieht man eine

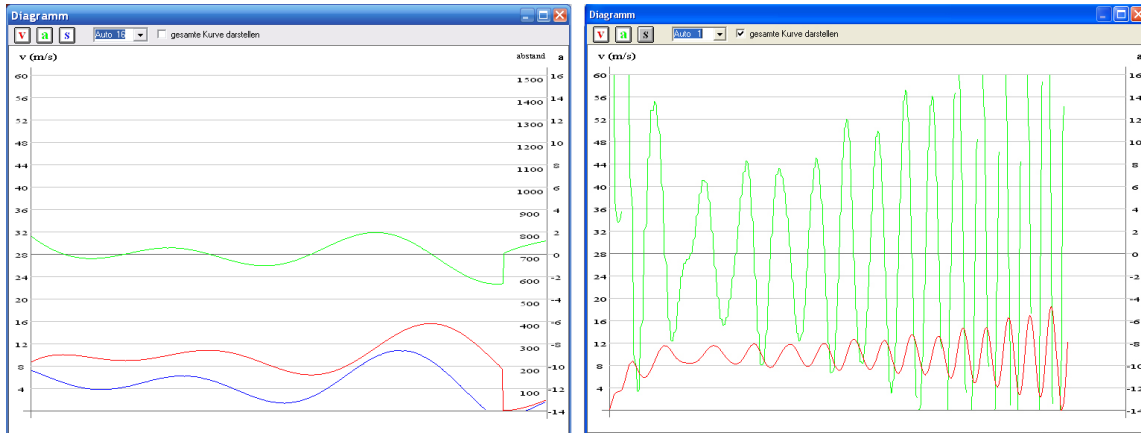


Abbildung 10: Crash: in beiden Fällen schaukelt sich die Geschwindigkeit sowie die Beschleunigung auf bis hin zum Crash.

sich aufschaukelnde grüne Beschleunigungskurve. Nach einiger Zeit jedoch, macht die Kurve einen Sprung. Das kommt dadurch zustande, daß das Auto am Anfang immer wieder stark beschleunigt, auf den Vordermann aufholt und dann umso stärker abbremsen muß. Wenn dann vielleicht das vordere Fahrzeug, nach Umständen noch abbremst, kann es wie in diesem Fall zu einem Crash kommen. Der Abstand zu dem Vorfahrenden in blau wird ebenso wie die Eigengeschwindigkeit in rot schlagartig 0. Die folgenden Fahrzeuge müssen stoppen. Ein Stau entsteht.

Um das Verhalten der Fahrzeuge bei unterschiedlich erlaubten Geschwindigkeiten auf der Strecke zu analysieren, können auch verschiedene Verkehrszeichen, wie Geschwindigkeitsbeschränkungen, aufgestellt werden. „Künstlich“ erzeugte Staus können so simuliert werden. Dazu muß die erlaubte Fahrgeschwindigkeit auf einem Teil der Strecke herab gesetzt und unter Umständen wenig später wieder aufgehoben werden, um so das Verhalten des Verkehrs vor und nach einem Stau zu untersuchen. Abbildung 11 zeigt eine solche Streckenkonstellation. Anhand des ausgegebenen Diagramms ist genau zu erkennen, wann ein Fahrzeug in eine Geschwindigkeitsbeschränkung fuhr und wann diese wieder verlassen wurde. Speziell an diesem Beispiel fällt auf, daß der Geschwindigkeitsgraph sogar unter das vorgegebene Limit von 30 km/h fällt. Dies liegt wohl an einem erhöhten Verkehrsaufkommen, welches einen Fahrer veranlasst nicht zu dicht auf einen vor ihm Fahrenden aufzulaufen, wenngleich auch kein Stau entstehen wird.

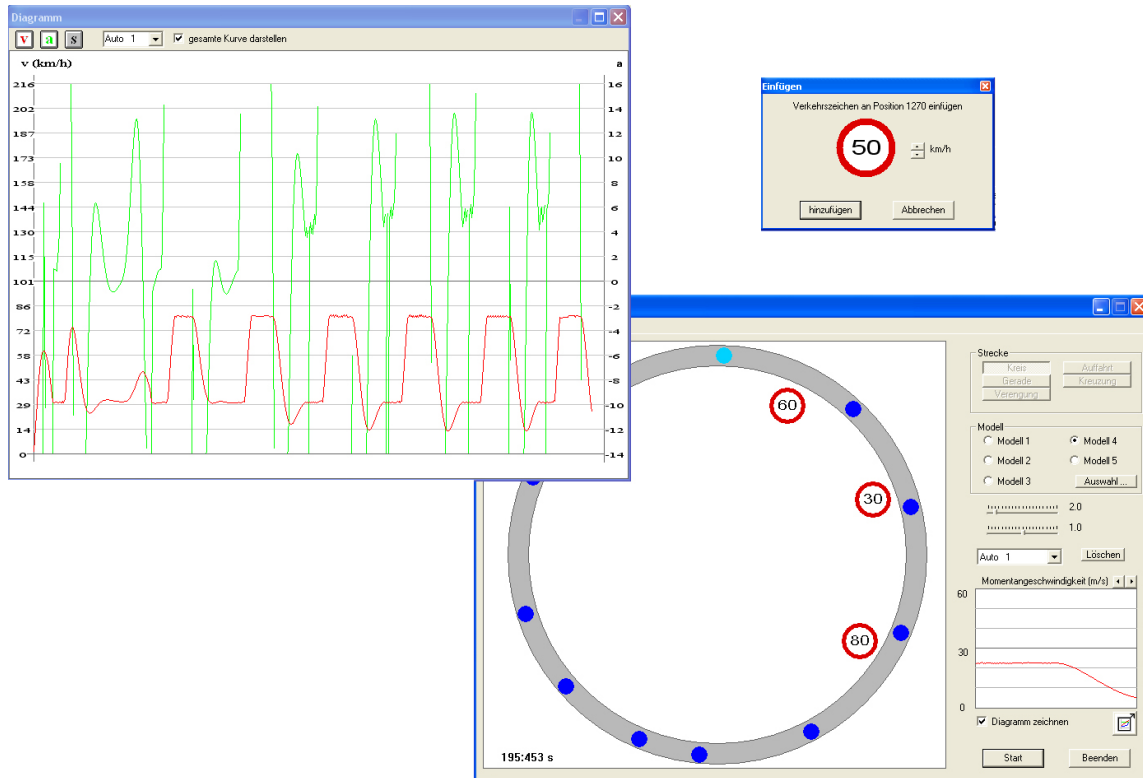


Abbildung 11: Das Simulationsprogramm.

### 3.1.1 Ein konkretes Beispiel

Wir haben eine runde Strecke der Länge  $L = 360m$  gefüllt mit  $N = 6$  Autos. Alle Autos haben eine maximale Geschwindigkeit von mindestens  $34 \text{ m/s}$ , die sie höchstens fahren können. Die Fahrzeuge beschleunigen am Anfang beginnend bei einer Geschwindigkeit von  $0 \text{ m/s}$ . Da die Strecke so kurz ist, wird das letzte Auto auch durch das erste beeinflusst.

Wir lassen die Fahrzeuge mit dem ODM2 (Modell 3 im Simulationsprogramm) und der Einstellung  $\text{Slider1} \equiv \alpha = 0.2$  und  $\text{Slider2} \equiv \beta = 1.0$  fahren (entspricht ruhige Fahrer). Man kann erkennen (Diagramm 13 links), daß die Autos offenbar die Geschwindigkeit entsprechend anpassen und gemächlich auf das Niveau beschleunigen, welches unter den gegebenen Bedingungen möglich ist. Nun lassen wir die Fahrzeuge mit dem ODM2 und der Einstellung  $\alpha = 0.2$  und  $\beta = 0.2$  fahren (entspricht aggressive Fahrer). Hier (siehe Grafik rechts) sieht man, daß die Kurven die Form einer gedämpften Schwingung annehmen, da die Autos zu stark beschleunigen und so den Abstand stets vergrößern und verkleinern, im Gegensatz zu dem vorangegangenen Beispiel, bei dem der Abstand konstant gehalten wurde. In Sonderfälle kann es hier auch zu Unfällen kommen, wie gesehen im Bild 10.



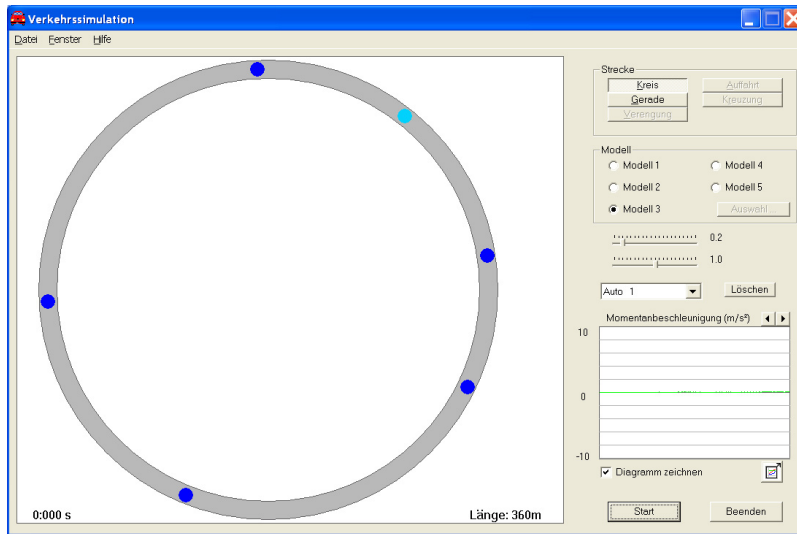


Abbildung 12: konkretes Beispiel mit 6 Autos auf einer Kreisbahn

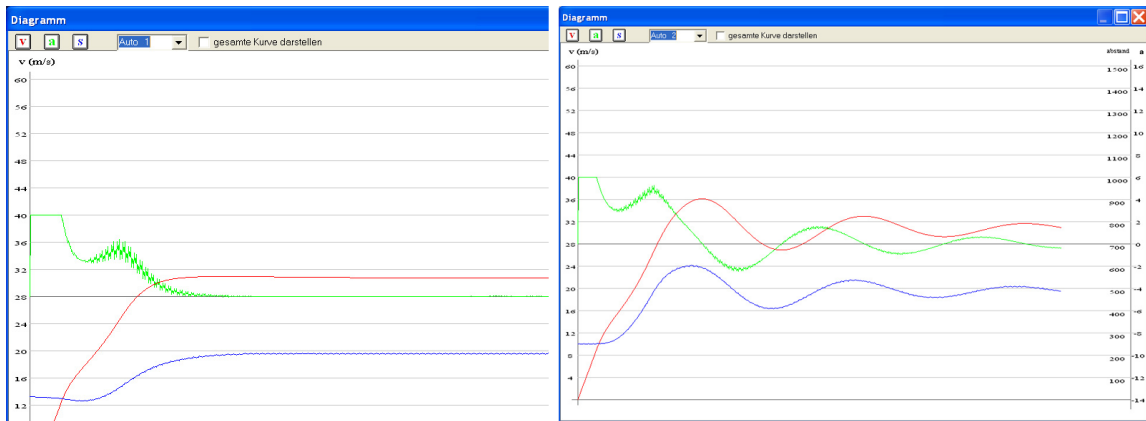


Abbildung 13: Diagramme mit den Einstellungen: links:  $\alpha = 0.2, \beta = 1.0$ , rechts:  $\alpha = 0.2, \beta = 0.2$ .

Ausgehend von diesem Beispiel erreichen wir einen solchen Crash, wenn wir  $\beta = 0$  setzten. Damit bestätigt sich auch die Annahme, daß die Einbeziehung von Geschwindigkeitsunterschieden in das Verkehrsmodell stabilisierend auf das Gesamtsystem wirkt.

Anhand dieser Erkenntnisse, ist schon zu erahnen wie wichtig die Parametereinstellungen für die Modelle sind. Deshalb haben wir für das ODM2 die Konfiguration gesucht, bei der die periodische Schwingung gerade in eine gedämpfte Schwingung umschlägt. Dies ist offenbar der Fall, wenn der erste Slider-Wert ( $\alpha$ ) 0,5 und der zweite ( $\beta$ ) auf 0 gesetzt ist. Allerdings fällt eine periodische Schwingung ganz und gar weg, sofern  $\beta = 0.5$ .

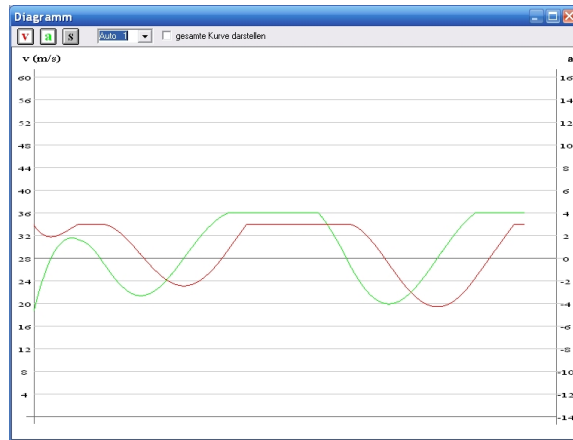


Abbildung 14: Diagramm mit der Einstellung  $\alpha = 0.2, \beta = 0.0$  im Simulationsmodell ODM2.

### 3.2 Analytische Untersuchungen

Die große Mehrzahl an Veröffentlichungen, die sich mit einer Analyse des Verkehrsgeschehens auseinandersetzen, basieren auf numerischen Untersuchungen [17, 6, 23, 21, 11]. Der Hauptgrund dafür ist, daß die verwendeten Modelle, wie z.B. das OV-Modell, analytischen Untersuchungen nur schwer zugänglich sind, da es sich um nicht-lineare Modelle handelt. In der jüngeren Vergangenheit wurden jedoch Versuche unternommen auch nicht-lineare Systeme qualitativ zu untersuchen [2, 14, 15].

Dabei war es aber immer nötig vereinfachende Annahmen zu treffen, wie beispielsweise gleiches Verhalten aller Autos bis auf eine gewisse Zeitverzögerung<sup>13</sup>. Auch in dieser Untersuchung, die noch in einem Anfangsstadium steckt, werden Vereinfachungen getroffen werden müssen, um mit „einfachen“ Mitteln zu ersten Erkenntnissen gelangen zu können. So werden wir zunächst darauf verzichten die mechanisch-physikalischen Beschränkungen mit in Betracht zu ziehen, die in unseren Modellen zu Nicht-Linearität führen.

Ein positiver Nebeneffekt dieser Vorgehensweise, ist eine Vereinfachung der Darstellung, die damit erreicht wird, und die es dem Leser einfacher machen wird, unserer Argumentation zu folgen. Dies trifft insbesondere auf die folgende Sektion zu, in der erklärt wird, wie Verkehr als diskretes dynamisches System gedacht werden kann und warum dies möglicherweise näher an der Realität liegt als eine kontinuierliche Beschreibung.

<sup>13</sup>Darauf wurde im Abschnitt 1.3 schon eingegangen.

### 3.2.1 Verkehr als diskretes dynamisches System

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit dem OD-Modell

$$\ddot{x}_i(t) = \alpha \left[ (x_{i+1}(t) - x_i(t)) - \frac{9}{5} \dot{x}_i(t) \right], i = 1, \dots, N, \quad (24)$$

welches das Verkehrsgeschehen als ein System von  $N$  Dgln. 2. Ordnung simuliert. Durch die Substitution  $\dot{x} = v$ , die bereits intuitiv von den physikalischen Gegebenheiten impliziert wird, kann dieses System in ein System

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \\ \alpha [(x_{i+1} - x_i) - \frac{9}{5} v_i] \end{pmatrix}, i = 1, \dots, N \quad (25)$$

von  $2N$  Dgln. 1. Ordnung transformiert werden.

In Vektorform kann dies auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \alpha [(x_2 - x_1) - \frac{9}{5} v_1] \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \\ \alpha [(x_1 - x_N) + L - \frac{9}{5} v_N] \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Und es ist leicht einzusehen, daß dies mit  $y = (x_1, v_1, x_2, \dots, x_N, v_N)^T$  in die allgemeine Matrixform

$$\dot{y} = Ay + f \quad (27)$$

gebracht werden kann, setzt man

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & -\frac{9}{5}\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & -\frac{9}{5}\alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -\frac{9}{5}\alpha \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha L \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Es ist zu beachten, daß es sich dabei um die Modellstrecke Kreis handelt und das  $N$ -te Auto das erste zum Vordermann hat. Das hat zum Einen zur Folge, daß das erste Element der letzten Zeile von  $A$ ,  $a_{N1}$ , nicht Null ist, und zum Zweiten, daß wir es durch den Summanden  $L$ , der der Länge der Kreisbahn entspricht, mit einem inhomogenen System zu tun haben, da  $f \neq \vec{0}$ .

Auf der geraden Strecke erhalten wir mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & -\frac{9}{5}\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & -\frac{9}{5}\alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f = \vec{0}, \quad (29)$$

ein homogenes System, wobei in diesem Fall die Geschwindigkeit des  $N$ -ten Fahrzeugs durch die Anfangswert  $v_N^0$  bestimmt ist. Wir wollen uns aber zunächst, den Simulationsbeispielen aus den letzten Abschnitten folgend, auf die Kreisbahn konzentrieren.

Bei dem System 27 mit  $A$  und  $f$  aus 28 handelt es sich um ein lineares, zeitinvariantes, autonomes Differentialgleichungssystem erster Ordnung. In anderen Worten: Die Matrix  $A$  sowie der Vektor  $f$  beinhalten ausschließlich konstante Werte. Systeme dieser Art sind sehr gut verstanden. Man kann beispielsweise, dem Existenzsatz von Picard–Lindelöf folgend, sicherstellen, daß für 27 in jedem Anfangspunkt  $y_0$  eine eindeutige Lösungskurve (auch Integralkurve)  $\phi(t, y_0)$  mit  $\dot{\phi}(t, y_0) = A\phi(t, y_0) + f$  existiert, da die Abbildungsfunktion  $g(y) = Ay + f$  aufgrund der Konstanz von  $A$  und  $f$  stetig ist und eine Lipschitz–Bedingung  $\|g(y_2) - g(y_1)\| \leq L \|y_2 - y_1\|$  mit  $L < \infty$  erfüllt. Insbesondere kann man für solche Systeme linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten durch Auffinden der Eigenwerte von  $A$  u.U. eine allgemeine Lösung finden<sup>14</sup>. Da wir aber auf eine Beschreibung des Verkehrssystems als *diskretes* dynamisches System abzielen, wird auf diese Fragestellungen (wir können das System 27 auch als *kontinuierliches* dynamisches System auffassen) hier nicht detaillierter eingegangen werden, obwohl auch dieser Weg der Betrachtung des Verkehrs als kontinuierliches System fruchtbar sein kann, Erkenntnisse über verschiedene Verkehrssituationen zu gewinnen.

Es gibt allerdings gute Gründe die Verkehrsproblematik als diskretes Problem aufzufassen. Zum Einen ist das die Tatsache, daß Computersimulationen kontinuierlicher Probleme in der Regel diskretisiert werden müssen, da Computer nur mit diskreten Darstellungen umgehen können. Es wird deshalb von uns als sinnvoll erachtet, auch die Analyse im Diskreten vorzunehmen, da auf diese Weise eine Korrespondenz zur numerischen Simulation sichergestellt ist. Der zweite und wichtigere Grund für die Modellierung des Verkehrs als diskretes System liegt allerdings in der Natur des Problems an sich. *Denn letzten Endes ist die mikroskopische Betrachtung von Verkehr ein diskretes Problem, da Entscheidungen der Fahrer immer zu gewissen (diskreten) Zeitpunkten getroffen werden. Und schließlich kann auch die Wahrnehmung und deren Verarbeitung selbst als ein diskreter Prozess angesehen*

<sup>14</sup>Es sei bemerkt, daß in unserem Fall  $\det(A) = 0$ , und daß dies die Konstruktion einer allgemeinen Lösung erschweren kann. Für eine ausführliche Behandlung dieser Fragen verweisen wir auf einschlägige Literatur über Differentialgleichungen [3, 10, 20].

werden, was sich beispielsweise in der Bildaktualisierungsfrequenz des menschlichen Auges von ca. 25 Bilder/s manifestiert. Aus diesen Gründen schlagen wir vor Verkehrssysteme als diskrete Systeme zu interpretieren.

Um zu einer diskreten Formulierung des Problems zu gelangen, benutzen wir den finiten Differenzenquotienten zur Approximation der ersten Ableitung

$$\dot{y}(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{y^{k+1} - y^k}{h}. \quad (30)$$

Damit kann auf Basis von System 27 die Iterationsvorschrift

$$y^{k+1} = h(Ay^k + f) + y^k = (hA + I)y^k + hf \quad (31)$$

der allgemeinen Form

$$y^{k+1} = g(y^k), k = 0, 1, \dots \quad (32)$$

formuliert werden. Diese Vorschrift liefert eine approximierte Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{y} = Ay + f, y^0 = (x_1^0, v_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0, v_N^0)^T$ . D.h., wir erhalten folgende Vorschrift, um den nächsten Zustand  $y^{k+1}$  des Systems zu errechnen:

$$y^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -h\alpha & 1 - \frac{9}{5}h\alpha & h\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -h\alpha & 1 - \frac{9}{5}h\alpha & h\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & h \\ h\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & -h\alpha & 1 - \frac{9}{5}h\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ x_N \\ v_N \end{pmatrix}^k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h\alpha L \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Vergleichen wir dies jedoch mit dem implementierten Iterationsschema (siehe Gleichung 24), so fällt auf, daß dies noch nicht mit 33 übereinstimmt, da unsere Implementation zur Berechnung der neuen Position  $x^{k+1}$  die bereits errechnete Geschwindigkeit  $v^{k+1}$  (an Stelle von  $v^k$ ) heranzieht. Die korrekte Darstellung unserer Iterationsvorschrift

$$y^{k+1} = g(y^k) = A_h y^k + f_h \quad (34)$$

erhalten wir demzufolge mit der Iterationsmatrix

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 - h^2\alpha & h(1 - \frac{9}{5}h\alpha) & h^2\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -h\alpha & 1 - \frac{9}{5}h\alpha & h\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 - h^2\alpha & h(1 - \frac{9}{5}h\alpha) & h^2\alpha & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -h\alpha & 1 - \frac{9}{5}h\alpha & h\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h^2\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 - h^2\alpha & h(1 - \frac{9}{5}h\alpha) \\ h\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & -h\alpha & 1 - \frac{9}{5}h\alpha \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Iterative Vorschriften der Form 24 sind uns in der Theorie nun als Matrix–Differenzgleichungen bekannt. Da es sich bei unserem Modell um ein lineares System handelt und die Matrix  $A_h$  sowie der Vektor  $f_h$  konstant sind, ist es möglich die Lösung des Systems direkt aufzuschreiben<sup>15</sup>:

$$y^k = A_h^k y^0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_h^{k-1-i} f_h. \quad (36)$$

Wir sehen, daß auf der rechten Seite dieser Gleichung nur der Anfangszustand (und keine weiteren Iterate), die bekannte Matrix  $A_h$  und der ebenfalls bekannte Vektor  $f_h$  zu finden sind, die jeweils eindeutig bestimmt sind. Das impliziert die Existenz einer eindeutigen Lösung.

Um in der Terminologie der diskreten dynamischen Systeme zu bleiben, können wir auch durch

$$y^k = g^k(y^0), g^k = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{k \text{ mal}} \quad (37)$$

zur in 36 angegebenen Lösung des Systems gelangen. Dies wird mit Hilfe des folgenden Schemas verdeutlicht:

$$\begin{aligned} y^1 &= g(y^0) = A_h y^0 + f_h, \\ y^2 &= (g \circ g)(y^0) = g^2(y^0) = A_h(A_h y^0 + f_h) + f_h, \\ y^3 &= (g \circ g \circ g)(y^0) = g^3(y^0) = A_h(A_h(A_h y^0 + f_h) + f_h) + f_h, \\ &\vdots \\ y^k &= \underbrace{(g \circ g \circ \dots \circ g)}_{k \text{ mal}}(y^0) = g^k(y^0) = A_h^k y^0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_h^{k-1-i} f_h. \end{aligned} \quad (38)$$

Es ist hierbei noch hervorzuheben, daß die Summe auf der rechten Seite von 36 im homogenen Fall entfällt, da  $f_h = \vec{0}$ . Das vereinfacht zunächst die Umstände auf der Geraden, kann aber auch auf der Kreisbahn von Nutzen sein, da sich inhomogene Matrix–Differenzgleichungen auf den homogenen Fall zurückführen lassen<sup>16</sup>.

Wir haben somit das mikroskopische Verkehrsmodell, ausgehend vom OD–Basismodell (entwickelt in Kapitel 2.3) als *diskretes dynamisches System* formuliert. Es ist wichtig zu bemerken, daß sich an der vorgenommenen Argumentation jedoch nichts entscheidend ändert, wenn wir die komplexeren Modelle betrachten<sup>17</sup>. Es ändert sich lediglich die Systemmatrix  $A_h$ , welche auch in diesen Fällen konstant ist. Allerdings ist diese Art der Formulierung des diskreten Verkehrsystems in Form einer Matrix–Differenzgleichung nicht mehr ohne Weiteres möglich, beziehen wir die physikalisch–mechanischen Beschränkungen mit ein.

<sup>15</sup>Für Details sei auf die allgemeine Literatur über Differenzgleichungen verwiesen, z.B. [3, 4, 12]

<sup>16</sup>Vgl. [4] Sek. 7.5.2

<sup>17</sup>Die Modelle ODM2 und ODM3 wären allerdings etwas anders zu formulieren, da, durch die Definition von  $V_0$ , noch weiter zurückliegende Simulationsschritte einbezogen werden.

### 3.2.2 Strategien für den generellen Fall – $N$ Fahrzeuge

In Abschnitt 3.1 haben wir verschiedene Verhaltensweisen des Verkehrssystems kennengelernt. Es wurden Fälle beobachtet, bei denen das System in einen Ruhezustand<sup>18</sup> einpegelte, wir haben periodisches Verhalten gesehen, und wir haben Parameterkonstellationen gefunden, bei denen das System aufschaukelte, was letzten Endes zu Unfällen führen muß. Die Aufgabe der nächsten zwei Sektionen ist es, genau zu klären, bei welchen Parameterkonstellationen welches Verhalten zu erwarten ist und insbesondere, bei welchen Werten sich das Systemverhalten qualitativ ändert. Wir werden dazu im folgendem Abschnitt allgemeine Herangehensweisen an die Analyse eines Verkehrssystems mit  $N$  Fahrzeugen aufzeigen, um im nachfolgendem Abschnitt einige spezielle Fälle genauer unter die Lupe zu nehmen.

Unser Verkehrssystem ist, das haben wir im letzten Abschnitt gesehen, definiert durch die Folge  $\langle y^k \rangle$ , deren Elemente durch Gleichung 36 eindeutig gegeben sind. Diese Vorschrift involviert Potenzen der Systemmatrix  $A_h$ , welche in vielen Fällen nur sehr schwer und mit hohem Rechenaufwand aufzufinden sind. Es hängt dabei wesentlich von den Eigenschaften von  $A_h$  ab, ob ihre Potenzen  $A_h^k$  praktisch errechenbar sind. Da dadurch das Systemverhalten im Wesentlichen durch  $A_h$  bestimmt ist, wollen wir zunächst untersuchen, welche Eigenschaften unsere Systemmatrizen haben. Dazu ziehen wir in erster Linie die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$  der Matrizen heran<sup>19</sup>.

Wir betrachten zum Einen die Matrix 35, die der *Simulation auf einer Kreisbahn* entspricht, und zum Anderen die Matrix

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 - h^2\alpha & h(1 - \frac{9}{5}h\alpha) & h^2\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -h\alpha & 1 - \frac{9}{5}h\alpha & h\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 - h^2\alpha & h(1 - \frac{9}{5}h\alpha) & h^2\alpha & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -h\alpha & 1 - \frac{9}{5}h\alpha & h\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

die der *Simulation auf einer geraden Strecke* gleichkommt, wobei das  $N$ te Auto mit konstanter Geschwindigkeit  $v_N^0$  fährt. In beiden Fällen handelt es sich also um die Simulation mit dem OD-Basismodell (siehe 16). Wir wollen zunächst feststellen, was beiden Matrizen gemein ist, um dann auf die speziellen und verschiedenen Eigenschaften einzugehen.

In beiden Matrizen ist ein Eigenwert  $\lambda_1 = 1$ , unabhängig von der Parameterkonfiguration  $(h, \alpha)$ . Damit ist auch die Norm beider Matrizen  $\|A_h\| \geq 1$  und unsere iterative Vorschrift  $y^{k+1} = g(y^k)$  erfüllt keine Kontraktionsbedingung. Es ist somit nicht gesichert, daß die Systeme einen Fixpunkt besitzen. Die physikalischen Gegebenheiten betrachtend, ist dies aber auch sehr verständlich, da die Existenz eines Fixpunktes konstante Positions-

<sup>18</sup>Wir werden noch sehen, daß es sich bei diesem Zustand i. d. R. nicht um einen Ruhezustand im Sinne eines Fixpunktes handelt.

<sup>19</sup>Die meisten Untersuchungen wurden mit Maple [13] durchgeführt.

und Geschwindigkeitswerte implizieren würde, was nur eintreten kann, wenn die Geschwindigkeiten  $v_i$  den Wert 0 annehmen, also im Fall eines Stillstands der Systeme. Es könnte allerdings durchaus eine Möglichkeit zur weiteren Analyse der Systeme sein, sie so zu *transformieren*, daß sie in einen Fixzustand einpegeln und die neue, transformierte Systemmatrix erneut auf diese Eigenschaft zu untersuchen.

Des Weiteren können wir feststellen, daß in beiden Fällen alle Eigenwerte  $\lambda_i \neq 0$  sind, was nach sich zieht, daß auch die Determinante  $\det(A_h) \neq 0$  ist.

Die Frage nach der *Diagonalisierbarkeit* der Matrizen, die eng verknüpft ist mit der Gestalt der restlichen Eigenwerte, erfordert es allerdings schon, die Matrizen 35 und 39 gesondert zu betrachten.

Eine Matrix  $A$  ist diagonalisierbar, falls alle ihre Eigenwerte voneinander verschieden sind. In diesem Fall gibt es eine Ähnlichkeitstransformation  $X$ , die mit

$$X^{-1}AX = \Lambda \quad (40)$$

$A$  in  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N})$  überführt<sup>20</sup>. Dies ist sehr vorteilhaft, da die Potenz

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{2N}^k \end{pmatrix} \quad (41)$$

einfach zu errechnen ist, und damit

$$A^k = (X\Lambda X^{-1})^k = X\Lambda^k X^{-1} \quad (42)$$

ebenfalls bestimmt werden kann.

Hat die Matrix im Gegensatz dazu *mehrfache Eigenwerte*, so ist sie zwar nicht diagonalisierbar, aber es läßt sich doch zumindest eine Transformation  $X$  finden, die mit

$$X^{-1}AX = J \quad (43)$$

eine *Jordansche Form*<sup>21</sup>

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & J_n \end{pmatrix}, J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad (44)$$

<sup>20</sup>Vgl. Spektrales Dekompositionstheorem. Z.B in [4].

<sup>21</sup>Vgl. Jordansches Dekompositionstheorem. Z.B in [19, 4].



der Matrix herstellt. Die Potenz der Jordanmatrix ist durch

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3^k & 0 & & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & J_n^k \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2} \lambda_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{m} \lambda_i^{k-m} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} & \dots & \binom{k}{m-1} \lambda_i^{k-(m-1)} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i^k \end{pmatrix} \quad (46)$$

ebenfalls berechenbar. Die Mehrfachheit des Eigenwertes  $\lambda_i$  ist dabei durch  $m$  gegeben und der zugehörige *Jordanblock*  $J_i$  ist eine  $m \times m$  Matrix. Im Fall verschiedener Eigenwerte, sprich  $m_i = 1, \forall i$  korrespondiert die Jordandekomposition also zu einer Spektraldekomposition.

Es ist allerdings in beiden Fällen praktisch schwierig (vor allem für große Matrizen) die Transformation  $X$  zu finden.

In der Praxis häufiger angewandt ist deswegen die Rationale Kanonische Form einer Matrix. Jede quadratische Matrix ist ähnlich zu einer blockweise diagonalen Matrix

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_n \end{pmatrix}, \quad (47)$$

wobei die Blockmatrizen

$$C_i = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_m \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

eine Form annehmen, die es erlaubt eine  $n$ -dimensionale Matrix-Differenzgleichung erster Ordnung in mehrere eindimensionale Differenzgleichung  $m$ -ter Ordnung zu verwandeln. Die Umformung einer Matrix in ihre Rationale Kanonische Form ist allerdings ebenfalls nicht trivial, zeigt aber einige Vorteile gegenüber der Jordandekomposition<sup>22</sup>.

<sup>22</sup>Da eine ausführlichere Behandlung dieses Themas den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde und hier lediglich generelle Strategien aufgezeigt werden sollen, sei auch hier auf die einschlägige Literatur über Matrixtheorie und (Matrix-)Differenzgleichungen verwiesen. Z.B. [4, 19]

Zu unserem Verkehrssystem zurückkehrend, können wir nun feststellen, daß Matrix 35 ausschließlich einfache Eigenwerte besitzt, also diagonalisierbar ist. Bei Matrix 39 ist das nicht der Fall<sup>23</sup>.

Deshalb kann die Herangehensweise an verschiedenen *Verkehrssysteme mit N Teilnehmern*, obwohl sie auf den ersten Blick recht verwandt scheinen, in der Mathematik durchaus verschieden sein.

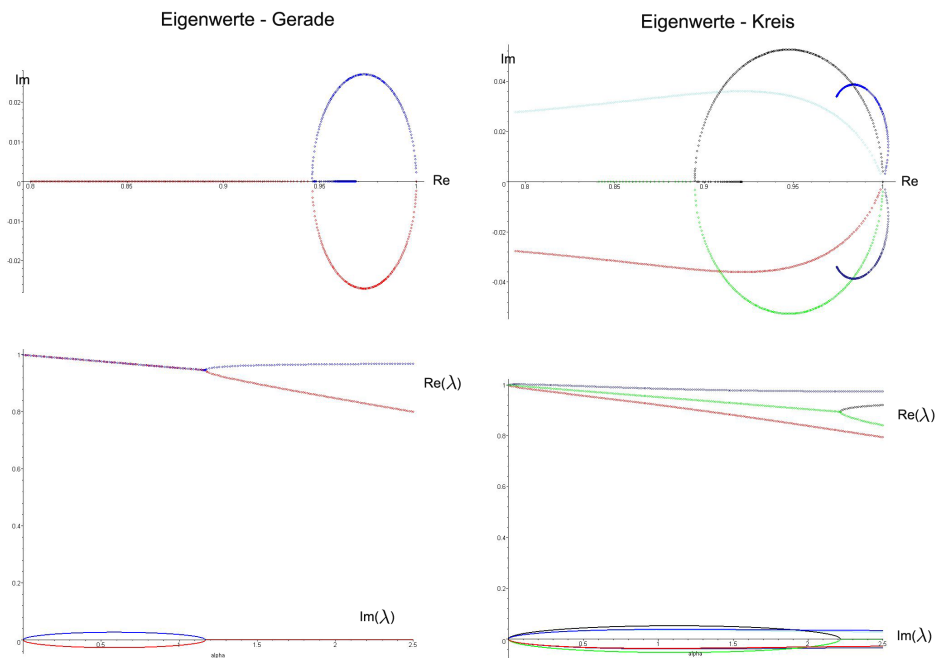


Abbildung 15: Gegenüberstellung der Eigenwerte des Systems auf der Geraden und auf der Kreisbahn. Jeweils oben sehen wir das Verhalten der Eigenwerte in der komplexen Ebene und unten den Verlauf der Real- und Imaginärteile von  $\lambda(\alpha)$  für  $\alpha \in (0, 2.5)$ . Es handelt sich hier um Systeme von 4 Autos. Es fällt auf, daß auf der Geraden nur zwei Eigenwerte visualisiert sind, weil diese mehrfach sind. Außerdem wurden  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  bei der Geraden und  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 - \frac{9}{5}h\alpha$  beim Kreis nicht visualisiert, da diese reell sind.

---

<sup>23</sup>Warum?

### 3.2.3 Spezielle Untersuchungen – 3 Fahrzeuge

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie man ein Verkehrssystem mit  $N$  Teilnehmern betrachten kann. Dies führte uns zur Analyse von  $2N$ -dimensionalen Matrix-Differenzgleichungen. In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf 3 Verkehrsteilnehmer, was uns zur Betrachtung eines 6-dimensionalen Systems bringt.

Zum Auffinden der analytischen Lösung eines solchen Systems, haben wir uns des Befehls „rsolve(Gleichungen,Anfangswerte,Lösungsmenge)“ von Maple [13] bedient, da die Operationen in Matrixdarstellung, wenn die Matrixelemente symbolische Ausdrücke sind, uns teilweise schon an die Grenzen der Rechenkapazitäten brachten<sup>24</sup>. D.h. wir haben die Möglichkeit spezifische Anfangswertprobleme genau unter die Lupe zu nehmen.

Bei dem Beispiel, welches wir im Folgenden betrachten, handelt es sich um den Fall, daß zwei Autos mit der Geschwindigkeit  $v_1^0 = v_2^0 = 30 \frac{m}{s}$  auf ein drittes, stehendes (d.h.  $v_3^0 = v_3^k = 0$ ) auffahren. Das dritte Auto kann somit allgemein als Hindernis auf der Straße aufgefasst werden. Wir befinden uns dabei auf der geraden Fahrbahn und betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \\ x_3 \\ v_3 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 - h^2\alpha & h(1 - \frac{9}{5}h\alpha) & h^2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -h\alpha & 1 - \frac{9}{5}h\alpha & h\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - h^2\alpha & h(1 - \frac{9}{5}h\alpha) & h^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -h\alpha & 1 - \frac{9}{5}h\alpha & h\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \\ x_3 \\ v_3 \end{pmatrix}^k \quad (49)$$

mit dem Anfangszustand  $y^0 = (-108, 30, -54, 30, 0, 0)^T$ . Die Positionen der auffahrenden Fahrzeuge ist dabei so gewählt, daß sie jeweils gerade die Bedingung  $\Delta x = \frac{\tilde{v}}{2}$  erfüllen. In der Realität finden wir solche Gegebenheit beispielsweise auf einer Landstraße, auf der zwei mit 108 km/h hintereinanderfahrende Fahrzeuge plötzlich (z.B. hinter einer Kurve) auf ein Hindernis treffen.

Wir haben dieses System mit Maple gelöst und betrachten nun das Systemverhalten für verschiedene  $\alpha$ . Es ist zu beachten, daß wir in Übereinstimmung mit dem Simulationsprogramm eine Zeitschrittgröße  $h = 0.05$  betrachten. Das erste Diagramm (siehe Abb. 16 auf der nächsten Seite) zeigt das Positions- und Geschwindigkeitsverhalten bei einem Parameterwert  $\alpha = 0.2$ . Bei der Betrachtung der Positionsentwicklung fällt auf, daß sowohl Auto 2 als auch Auto 1 mit seinem Vorgänger zusammenstößt und einen Unfall verursacht. Die Bereiche, in denen das passiert, sind farbig hinterlegt. Ansonsten können wir für beide Kurven  $x_1(k)$  und  $x_2(k)$  das Verhalten einer gedämpften Schwingung feststellen, wobei das stehende Fahrzeug den Nullpunkt dieser Schwingung darstellt. Das impliziert, daß mitunter negative Geschwindigkeiten errechnet werden, die im eigentlichen nicht-linearen Modell

<sup>24</sup>Aufgrund der Länge und Komplexität des Lösungsausdrucks ist es nicht möglich diesen hier zu präsentieren. Für Details verweisen wir deshalb auf die angehangene Datei „LSGGerade.mws“.

nicht zugelassen sind. Das Geschwindigkeitsdiagramm auf der linken Seite von Abbildung 16 zeigt das. Die entsprechenden Bereiche sind ebenfalls farbig hinterlegt.

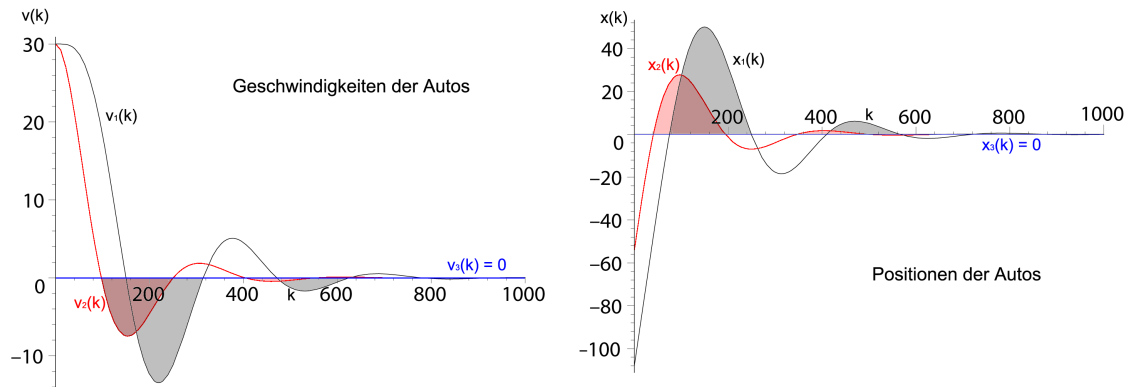


Abbildung 16: Das Positions- und Geschwindigkeitsverhalten auf der Geraden bei  $\alpha = 0.2$  ( $h = 0.05$ ). Farbig hinterlegt sehen wir die Geschwindigkeitsbereiche, die durch das nicht-lineare Modell ausgeschlossen wären bzw. die Positionsbereiche, die in der Realität nicht auftreten können, weil vorher ein Crash stattfindet.

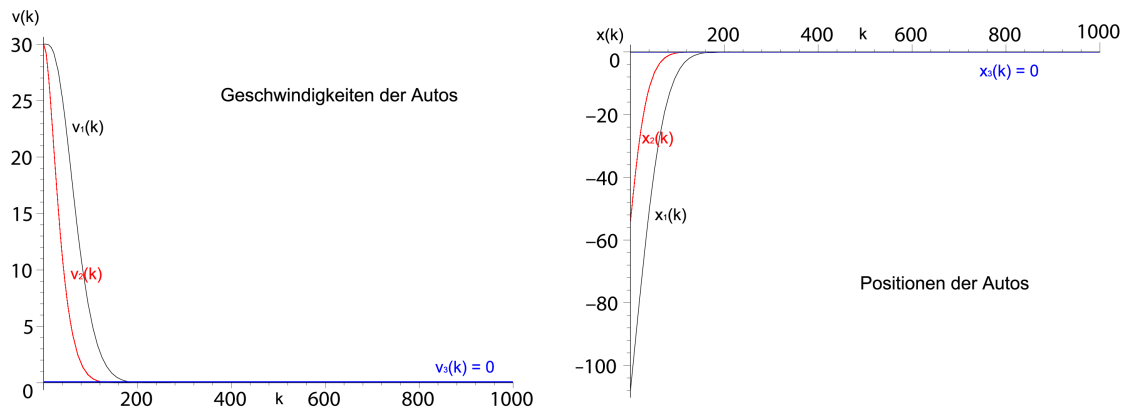


Abbildung 17: Das Positions- und Geschwindigkeitsverhalten auf der Geraden bei  $\alpha = 1.0$ .

In erster Linie wollen wir das so interpretieren, daß man mit der Analyse des linearen OD-Modells, das Verhalten des nicht-linearen Falls nur sehr eingeschränkt erfassen kann und die Einbeziehung von Nichtlinearitäten in die Analyse nötig sein wird. Dies betrifft sowohl die Geschwindigkeitsbeschränkungen als auch, und das ist vielleicht noch wichtiger, die Beschleunigungsgrenzen. Zu einer zweiten Schlußfolgerung kann aber bei der Betrachtung von Diagramm 16 außerdem gelangen: In dem konstruierten Beispiel kommt es mit  $\alpha = 0.2$

immer, also auch im nicht-linearen Fall, zu einem Unfall, da die nicht-linearen Beschränkungen in keinem Fall zu einer vergrößerten Verzögerung führen und die Geschwindigkeit erst negative Werte annimmt, wenn der Unfall bereits geschehen ist.

Ein wenig anders sieht das Verhalten des Systems bei  $\alpha = 1.0$  aus (vgl. Abb. 17). Hier kommen beide Autos scheinbar rechtzeitig zum Stehen<sup>25</sup>. Es ist allerdings bei genauerem Hinschauen auch hier eine gedämpfte Schwingung, die von  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$ ,  $v_1(k)$ ,  $v_2(k)$  vollzogen wird, so daß wir es qualitativ mit dem gleichen Verhalten zu tun haben.

Erhöhen wir  $\alpha$  allerdings weiter, so ändert sich das Verhalten qualitativ und es treten keine Schwingungen mehr auf. Im speziellen Fall passiert diese Veränderung bei einem Wert  $\alpha \approx 1.1687$  in dem Sinne, daß bei Werten  $\alpha < 1.1687$  schwingende Lösungen zu beobachten sind und bei Werten  $\alpha > 1.1687$  nicht.

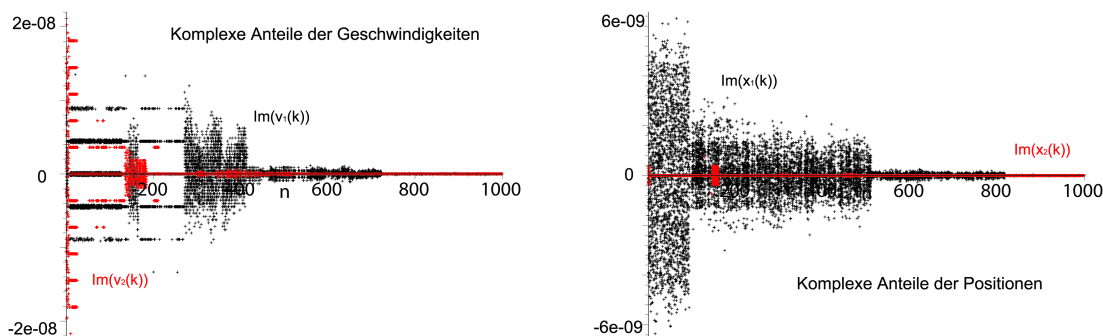


Abbildung 18: Das komplexe Positions- und Geschwindigkeitsverhalten auf der Geraden bei  $\alpha = 0.2$ .

Um zu diesem Ergebnis zu gelangen, haben wir uns die komplexen Bestandteile der Lösung angeschaut, da wir diese als Ursache des schwingenden Verhaltens vermuten. Die komplexen Bestandteile der Positionen und Geschwindigkeiten sehen wir für  $\alpha = 0.2$  in Diagramm 18 und für  $\alpha = 1.0$  in Diagramm 19 dargestellt. Wir sehen in beiden Diagrammen, daß die komplexen Bestandteile mit wachsendem  $k$  abnehmen und daß das bei einem Parameterwert  $\alpha = 1.0$  schneller geschieht.

Nachdem wir dieses Verhalten entdeckt hatten, haben wir uns die von Maple ermittelte Lösung des Systems noch einmal genauer angeschaut. Als Ursache für komplexe Lösungsbestandteile konnte *ein* wiederholt auftretender Term

$$w(\alpha, h) = \sqrt{25h^4\alpha^2 - 100h^2\alpha + 90h^3\alpha^2 + 81h^2\alpha^2} \quad (50)$$

<sup>25</sup>Man beachte, daß die Fahrzeuge in der Realität und auch im Simulationsprogramm eine gewisse Ausdehnung haben und der Nullpunkt um einen gewissen Betrag in Richtung  $x$  verschoben wäre.

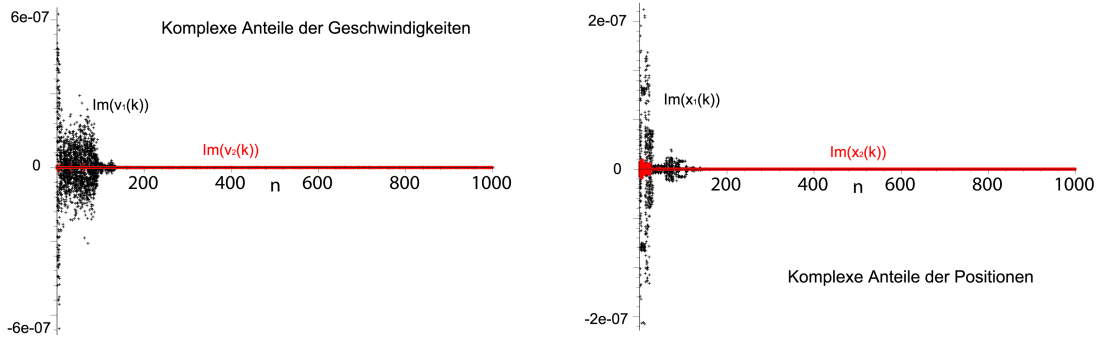


Abbildung 19: Das komplexe Positions- und Geschwindigkeitsverhalten auf der Geraden bei  $\alpha = 1.0$ .

ausgemacht werden. Schauen wir uns diese Wurzel bei fixiertem  $h = 0.05$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  an, so sehen wir, daß bei einem Wert  $\alpha \approx 1.1687$  keine komplexen Bestandteile mehr auftreten und auch die Lösung ausschließlich reelles Verhalten zeigt. Die genaue Klärung dieser Umstände, sowie die physikalische Interpretation wird Aufgabe weiterer Untersuchungen sein müssen.

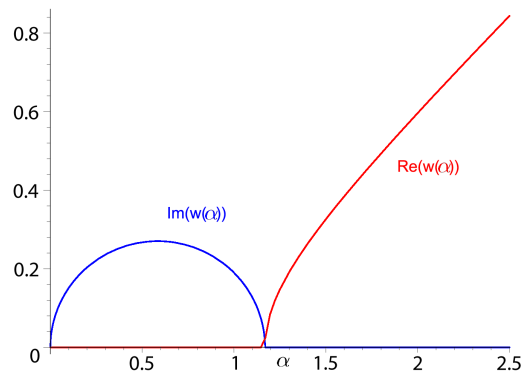


Abbildung 20: Der Bestandteil der Lösung, der zu komplexen Positionen und Geschwindigkeiten führt.

Als weiteres Beispiel haben wir ursprünglich gedacht, eine Kreisbahn bestimmter Länge  $L$ , gefüllt mit drei Fahrzeugen zu untersuchen. Leider mußten wir feststellen, daß dies in Maple nicht mit den gleichen Mitteln erreicht werden kann, da die Ausdrücke  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$ ,  $x_3(k)$ ,  $v_1(k)$ ,  $v_2(k)$ ,  $v_3(k)$ , die wir bei Verwendung von „rsolve(Gleichungen, An-

fangswerte, Lösungsmenge)“ erhalten, nicht ohne Weiteres ausgewertet werden können<sup>26</sup>. Deshalb haben wir uns hier auf zwei Autos beschränkt, um doch zumindest eine Idee von einem solchen System zu bekommen.

Die Abbildungen 21 und 22 zeigen den typischen Verlauf von Geschwindigkeit und Position in einem Kreisbahnsystem mit zwei Autos. Wir haben in diesem Beispiel  $L = 77$ ,  $v_1^0 = v_2^0 = 30 \frac{m}{s}$  gewählt. Die Autos starten mit einem Abstand  $\Delta x^0 = 20m$ . Die Zeitschrittgröße ist wie in den vorherigen Beispielen auf  $h = 0.05$  festgesetzt.

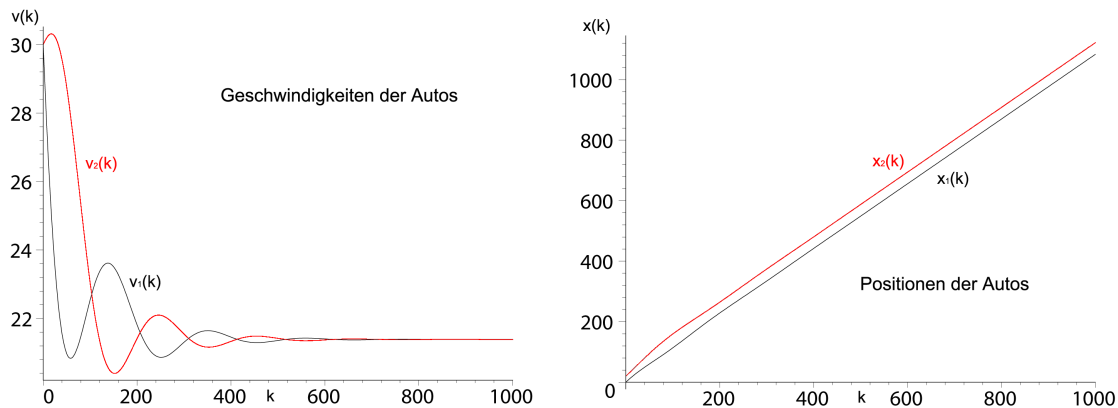


Abbildung 21: Das Positions- und Geschwindigkeitsverhalten zweier Autos auf dem Kreis bei  $\alpha = 0.2$ .

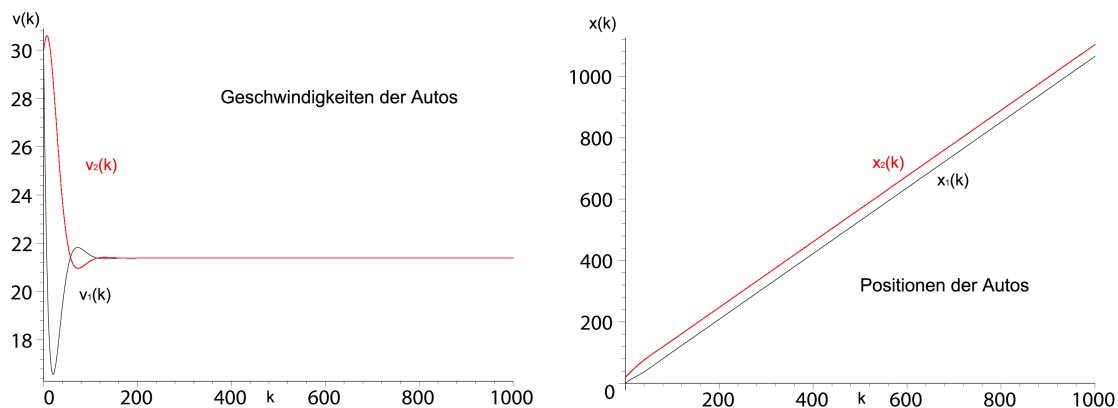


Abbildung 22: Das Positions- und Geschwindigkeitsverhalten zweier Autos auf dem Kreis bei  $\alpha = 1.0$ .

<sup>26</sup>Siehe „LSG Kreis2.mws“.

Wir beobachten, und in diesem Fall war das eher zu erwarten, auch hier schwingende Lösungen, insbesondere sichtbar bei den Geschwindigkeitsgraphen jeweils auf der linken Seite. Wir können weiterhin feststellen, daß die Geschwindigkeiten mit den hier betrachteten Parameterkonfigurationen in einen Ruhezustand einpegeln und nach einer gewissen Zeit konstant bleiben. Das bedeutet gleichzeitig eine konstante Positionsveränderung ab einem gewissen Zeitpunkt. Wir konnten solches Verhalten schon im Simulationsprogramm beobachten.

Aufschaukelnde Lösungen, wie sie ebenfalls im Simulationsprogramm zu beobachten sind, entstehen hier erst wenn wir auch die Zeitschrittgröße erhöhen. Einige Darstellungen solchen Verhaltens sind im Anhang B zu finden. Da wir mit unseren Untersuchungen noch ganz am Anfang stehen und meinen, daß die genaue Analyse der Kreisbahn eine der wichtigsten Aufgaben für die Zukunft darstellt, möchten wir an dieser Stelle nicht tiefer auf das Verhalten zweier Autos auf der Kreisbahn eingehen, und es dabei belassen, nur eine „Idee“ des Systemverhaltens vermittelt zu haben. Außerdem denken wir, daß es im Fall der Kreisbahn fruchtbar sein könnte, eine Diagonalisierungsstrategie zu verfolgen und so auch Systeme mit drei oder mehr Autos zu verstehen.

Eine wichtige Eigenschaft des Systems soll allerdings zum Schluß noch aufgezeigt sein, da sie sowohl in der numerischen Simulation des nicht-linearen Modells als auch in der Analyse des 2-Autosystems zu beobachten ist. Wenn das System nämlich in einen Ruhezustand einpegelt, was bei der Betrachtung von zwei Autos bei einer Zeitschrittgröße von  $h = 0.05$  die Regel ist, dann ist dieser Zustand sehr gut definiert. Alle Autos pegeln sich auf eine Geschwindigkeit

$$v^p = \frac{5L}{9N} \quad (51)$$

ein, wobei der Index  $p$  den Zeitpunkt angibt, ab dem diese Beziehung gilt,  $N$  die Anzahl der Autos und  $L$  die Länge der Kreisbahn repräsentiert. Das ist einfach zu interpretieren. Wenn in einem Kreissystem alle Fahrzeuge den gleichen Abstand zum jeweiligen Vordermann einnehmen, was im Ruhezustand der Fall ist, dann ist dieser Abstand durch  $\Delta x^p = \frac{L}{N}$  gegeben. Der Faktor  $\frac{5}{9}$  ergibt sich dann aufgrund der Forderung  $\Delta x = \frac{\tilde{v}}{2} = \frac{9}{5}v$ . Weiterhin impliziert dieses Geschwindigkeitsverhalten, daß sich die Positionen ab dem Zeitpunkt  $p$  linear verhalten, mit

$$x^{k+1} = x^k + v^p h = x^p + h^k v^p, \quad (52)$$

für  $k > p$ . Diese Information könnte in weitergehenden Untersuchungen genutzt werden, um, mit Hilfe einer entsprechenden Transformation des Systems, festzustellen, ob und unter welchen Umständen ein System in diesen Zustand einpegelt oder nicht.



## 4 Abschließende Einschätzung und Ausblick

Verkehrsforschung ist ein interessantes Forschungsfeld. Es ist ein Forschungsgebiet, in dem wir es zum Einen mit Fragestellungen zu tun haben, die aus mathematischer Sicht sehr interessant sind, und die auf der anderen Seite auch eine hohe Relevanz in der Praxis besitzen. Die Verkehrsforschung stellt deshalb eines der Gebiete dar, in denen mathematische Untersuchungen zu unmittelbar in der Realität anwendbaren Ergebnissen führen können, die diese verändern und vielleicht verbessern, welche aber doch zumindest zu einem besseren Verständnis der (Verkehrs)Wirklichkeit führen. Mit dieser zunächst ganz persönlichen Einschätzung, die sich während der Beschäftigung mit dem Thema entwickelt und bis zum Schluß erhalten hat, wird dieses letzte Kapitel begonnen sein, in welchem wir zusammenfassen werden, was bisher, im Rahmen dieses Laborprojekts, getan wurde, und in dem wir weiterhin skizzieren wollen, wohin die weitere Entwicklung führen könnte.

Wir wollen an dieser Stelle gleich anschließen, daß sich dieses Projekt, welches wir im April 2006 begonnen haben und das nun im November 2006 vorerst zu einem Abschluß gelangen muß, erst auf „halber Strecke des Weges“ befindet, in dem Sinne, daß viele konkrete Aussagen, die wir bei Beginn des Projektes vor Augen hatten, weitere, tiefergehende Untersuchungen erfordern. Wir möchten daher dieses Projekt in erster Linie als eine Grundsteinlegung in die Richtung einer realistischen Betrachtung von Verkehrssystemen verstanden wissen.

Dies bezieht sich vor allem auf die Modellierung, die den ersten wichtigen Teil dieser Arbeit darstellt. Wir haben vorgeschlagen, Verkehr als ein System von finiten Differenzengleichungen, und im allgemeinerem Sinne als ein diskretes dynamisches System aufzufassen, was unseres Wissens in dieser Form noch nicht versucht worden ist. Während in der Vergangenheit analytische Betrachtungen von mikroskopischen Verkehrsmodellen i.d.R. auf Basis der resultierenden (kontinuierlichen) Dgln. durchgeführt wurden, die numerische Simulation jedoch immer eine Diskretisierung voraussetzt, schlagen wir also vor auch die analytischen Untersuchungen im Bereich des Diskreten durchzuführen, um somit die Korrespondenz beider der analytischen und der numerischen Betrachtung sicherzustellen. Dieses Vorgehen ist nicht zuletzt auch in der Wahrnehmung des Menschen begründet, die letzten Endes ebenfalls diskreter Natur ist, was zur Folge hat, daß auch die Entscheidungen der Fahrzeugführer zu diskreten Zeitpunkten getroffen werden. Als Hauptbeitrag dieses Projektes betrachten wir daher die Entwicklung eines „überschaubaren“ mikroskopischen Verkehrsmodells auf der Basis diskreter dynamischer Systeme.

Es waren verschiedene Anforderungen, die bei der Entwicklung dieses mikroskopischen Verkehrsmodells eine Rolle spielten. Das Modell sollte zum Einen möglichst viele in der Realität zu findende Effekte simulieren können und dabei zum Anderen eine Komplexität aufweisen, die es erlaubt auch mit analytischen Mitteln zu Aussagen zu gelangen. Des Weiteren sollte es die Faustregel „Abstand = Tacho halbe“ als generellen Richtwert der optimalen Distanz zum Vordermann innehalten. In Kapitel 2.3 haben wir, diesen Anforderungen folgend, ein Modell hergeleitet, welches ähnlich der bekannten OV-Modelle jedem

Abstand,  $\Delta x$ , eine Geschwindigkeit  $v$  zuordnet, wobei diese Geschwindigkeit aber in unserem Fall durch die Beziehung „Abstand = Tacho halbe“,  $\Delta x = \frac{\hat{v}}{2}$ , bestimmt ist. Wir haben dieses Modell, dieser Idee folgend, *OD-Basismodell* (siehe Gleichung 16) genannt.

Auf Basis dieses Modells haben wir dann verschiedene Modellvarianten entwickelt, mit deren Hilfe wir verschiedenes Systemverhalten zu erzeugen und zu untersuchen erhofften. Insbesondere möchten wir hier an die Modelle ODM2 und ODM3 erinnern, die neben dem Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Fahrzeugen,  $\Delta x$ , auch den Geschwindigkeitsunterschied,  $\Delta v$ , zwischen beiden, bzw. eine Schätzung dieser Größe, in Betracht ziehen. Durch diese Erweiterungen kann der Realismus der Verkehrssimulation weiter erhöht werden.

Die Frage, wie man einfache, realistischere Modelle finden kann, führte uns zu dem Versuch eines generellen Verkehrsmodells

$$\ddot{x}(t) = \alpha X_{\frac{\hat{v}}{2}} + \beta V_0 + \gamma A_0, \quad (53)$$

welches als dritten Bestandteil außerdem noch die auf die Beschleunigungsunterschiede bezogene Größe  $A_0$  aufweist. Dieser letzte Term könnte beispielsweise den Einfluß der Bremslichter auf das Verhalten des dahinterfahrenden Fahrzeuges modellieren und damit noch näher an die in der Realität gegebenen Umstände führen. Eine Integration dieses Terms in das Simulationsprogramm betrachten wir als eine vielversprechende Erweiterung in der Zukunft. Eine weitere interessante Problematik, die mit einem solchen allgemeinen Entwurf erfaßt werden könnte, ergibt sich, assoziieren wir den die Geschwindigkeitsunterschiede betreffenden Term  $V_d$  mit einer Richtgeschwindigkeit  $d \neq 0$ . Dies bedeutet, gleich dem Term  $X_{\frac{\hat{v}}{2}}$ , daß ein gewünschter Geschwindigkeitsunterschied  $d$  zwischen zwei Fahrzeugen existiert, was praktisch den Fall eines Dränglers simulieren kann<sup>27</sup>. Wir glauben, daß Modelle dieser Art sehr vielversprechend sind, da sie trotz ihrer Einfachheit eine Vielzahl relevanter Faktoren in Betracht ziehen.

Der an die Modellentwicklung logisch anschließende Teil der Projektarbeit war die Implementation eines Simulationsprogrammes, welches die Möglichkeit bietet, zwischen den verschiedenen Simulationsmodellen zu wählen. Dazu wurden die in Form einer Dgl. vorliegenden Modellgleichungen mit Hilfe eines semi-impliziten Integrationsschemas diskretisiert, und in das Programm integriert. Ebenfalls integriert wurden die physikalisch-mechanischen Beschränkungen der Fahrzeuge, orientiert an realen Daten verschiedener Fahrzeughersteller. Des Weiteren ist es möglich, als Fahrstrecke zwischen Kreisbahn und Gerade zu wählen. Und nicht zuletzt kann durch das Einfügen von Geschwindigkeitsbeschränkungen in Form von Verkehrsschildern der Einfluß solcher Maßnahmen direkt und in Echtzeit beobachtet werden, was die Anwendungsmöglichkeiten des Programms weiter vervollständigt. Das Programm sollte außerdem eine adäquate Visualisierung der Simulationsdaten bereitstellen.

---

<sup>27</sup>Die tiefgestellten Werte  $(\frac{\hat{v}}{2}, 0, 0)$  sind jeweils als optimale Differenz zu verstehen. Bei  $X_{\frac{\hat{v}}{2}}$  hieß dies ein gewünschter Abstand, der der Hälfte des auf dem Tacho angezeigten Wertes entspricht.

Diese Anforderung wird, wie wir in Abschnitt 3.1 gesehen haben, von dem Simulationsprogramm, welches diese Dokumentation begleitet, erfüllt, und die resultierenden Diagramme können gut zur Auswertung der Simulationsergebnisse verwendet werden.

So zeigte die Untersuchung verschiedener Simulationskonstellationen (siehe Abschnitt 3.1) zunächst einmal die verschiedenen Verhaltensweisen, die bei der Simulation der mikroskopischen OD-Modelle auftreten können: konstantes Verhalten, aufschaukelndes Verhalten und quasi-periodisches Verhalten. Außerdem zeigte die Untersuchung eines konkreten Beispiels in Abschnitt 3.1.1, daß die Einbeziehung der Geschwindigkeitsunterschiede in die Modelle eine stabilisierende Wirkung auf das Verkehrssystem hat. Die Serie im Anhang B bestätigt diese Tatsache.

Es gilt hier jedoch zu sagen, daß es in der Zukunft nötig sein wird, noch mehr dieser Simulationsbeispiele zu betrachten und diese Untersuchungen in besser strukturierter Form durchzuführen, um zu einem genauen Verständnis des Einflusses der verschiedenen, variierbaren Parameter zu gelangen. Auch wird es sicherlich nötig sein, reale Verkehrsdaten, gewonnen durch Verkehrsaufzeichnungen, mit den durch die Modelle erzeugten Daten zu vergleichen. Erst damit können wir uns der Güte der entwickelten Modelle wirklich sicher sein.

Eine der Grundideen zu Anfang dieses Projektes war es *diskrete* Verkehrsmodelle zur Analyse des qualitativen Verhaltens eines Verkehrssystems heranzuziehen. Der Implementation folgend, wurde deshalb in Abschnitt 3.2.1 eine allgemeine Formulierung des Problems als diskretes dynamisches System vorgenommen. Im Rahmen dieses Projektes war es uns dabei leider noch nicht möglich auch die nicht-linearen Bestandteile, die im Wesentlichen durch die Einbeziehung der physikalisch-mechanischen Beschränkungen zustande kommen, in diese Formulierung zu integrieren, und wir haben uns bei der Analyse auf den linearen Fall beschränkt. Eine Folge dieser Vereinfachung war die Formulierung des diskreten Verkehrssystems als Matrix-Differenzen-Gleichung, welche bereits sehr gut erforscht sind. Für ein vollständiges Verständnis solcher Verkehrssysteme ist es denn aber unserer Meinung nach auch sinnvoll, sich zunächst dem „einfacheren“, linearen Fall zu nähern, um mit dem gewonnenem Verständnis dann die komplexeren, nicht-linearen Systeme zu analysieren. Die Bearbeitung der nicht-linearen Verkehrssysteme wird eine der spannenden und herausfordernden Arbeiten für die Zukunft sein.

Bei der Untersuchung des linearen Systems haben wir in dieser Arbeit zwei Strategien verfolgt: die eher theoretische Auseinandersetzung mit dem generellen Fall einer beliebigen Anzahl an Fahrzeugen und die Betrachtung eines konkreten Beispiels mit festen Anfangswerten. Dies war nicht von vornherein so geplant, sondern hat sich vielmehr dadurch ergeben, daß auch die Bearbeitung des linearen Falls schon eine durchaus anspruchsvolle Aufgabe darstellt, und eine Vielzahl möglicher Annäherungsstrategien existiert, die je nach speziellen Fall zum Erfolg führen können oder nicht.

So wurde z.B. lange versucht Systemtransformationen (im allgemeinem System mit  $N$  Fahrzeugen) zu finden, welche das System in eine Form bringen, die es erlaubt anhand der Eigenschaften (insbesondere anhand der Eigenwerte) der resultierenden, neuen Systemma-

trix zu Aussagen über das Langzeitverhalten dieses Systems zu gelangen. Diese Strategie blieb leider ohne Erfolg<sup>28</sup>, ist es aber sicherlich Wert, ein weiteres Mal durchdacht zu werden. Im Anschluß daran wurde auf die Theorie der Matrix–Differenzen–Gleichungen zurückgegriffen, die es erlaubt die Lösung des Systems direkt aufzuschreiben. Leider involviert diese Lösung Potenzen der Systemmatrix,  $A_h^k$ , deren Auswertung ein nicht–triviales Problem darstellt. Dieser Strategie folgend, wurden im Abschnitt 3.2.2 ein Überblick über verschiedene Methoden gegeben, mit deren Hilfe Matrizen so umgeformt (bzw. transformiert) werden können, so daß ihre Potenzen mit herkömmlichen Mitteln ausgewertet werden können. Wir haben bei der Analyse der Eigenwerte der Systemmatrizen festgestellt, daß Kreissysteme entkoppelt werden können. Auf die Systeme, die einer Simulation auf der Geraden entsprechen, trifft dies hingegen nicht zu. Dieser Abschnitt wurde bewußt allgemein gehalten, da die angeführten Methoden unabhängig von der Größe der jeweiligen Matrix sind und somit nicht von der Anzahl der Verkehrsteilnehmer abhängen.

In Kapitel 3.2.3 wurde dann ein spezifisches Anfangswertproblem unter die Lupe genommen und gezeigt, wie die Analyse eines speziellen Fallbeispiels aussehen kann. Wir haben im Falle von 3 Autos auf der Geraden gesehen, daß es in Abhängigkeit von der Parametereinstellung zu qualitativ unterschiedlichem Verhalten des Systems kommen kann. Wir haben gefunden, daß die Lösung dieses speziellen Problems bei einem Parameterwert  $\alpha < 1.1687$  schwingendes Verhalten zeigt und daß bei Parameterwerten  $\alpha \geq 1.1687$  dies nicht mehr so ist. Bei der Betrachtung verschiedener Anfangswerte auf der Geraden, die hier nicht aufgeführt wurde, ergab sich die gleiche Charakteristik.

Erinnern wir uns nun an die Eingangs erwähnte Interpretation des Parameters  $\alpha$  als Sensibilität des Fahrers und an die in Abbildung 7 zusammengefasste Parameterstudie des Wirkungsbereichs des OD–Modells, so können wir feststellen, daß ein Abstand, der der Hälfte des auf dem Tacho angezeigten Wertes entspricht, nicht unbedingt ausreichend ist, um einen Unfall zu verhindern. Zu diesem Schluß gelangt wir, da wir einen in der Realität relevanten Parameterbereich  $\alpha \in (0, 1]$  ausgemacht haben, die Werte  $\alpha \geq 1.1687$ , bei denen wir schwingende Lösungen ausschließen können, jedoch nicht mehr in diesem Bereich liegen.

Für die *Zukunft einer Verkehrssimulation auf Basis diskreter dynamischer Systeme* ergeben sich eine Vielzahl von Aufgaben, von denen einige hier kurz skizziert werden sollen. Generell ist dabei zwischen der Weiterverfolgung des linearen Falls und der Analyse und Formulierung des nicht–linearen Systems zu unterscheiden. Weiterhin ist zu beachten, daß Aussagen auf Basis der numerischen Simulation und auf Basis theoretischer Betrachtungen gefunden werden können, wobei die numerische Simulation i.d.R. komplexere Modelle zulässt.

Für die zukünftige Betrachtung des linearen Falls wäre es wünschenswert eine Analyse­methode zu finden, die eine freiere Wahl der Anfangswerte zulässt. Wir könnten so beliebige Fahrzeugkonstellationen betrachten und beispielsweise klären, bei welchen Ge-

---

<sup>28</sup>Bei der Anwendung der gefundenen Transformationen blieb die Systemmatrix i.d.R. unverändert, oder wies zumindest keine qualitativen Eigenschafts­veränderungen auf.

schwindigkeiten und welchen Parameterwerten  $\alpha$  die Bedingung „Abstand = Tacho halbe“ das Ausbleiben eines Unfalls sicherstellt. Diese Analyse­methode könnte auf Basis der in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Theorie gefunden werden.

Ein weiterer Schritt für die Weiterentwicklung der Untersuchung der linearen Problematik ist es, die Modelle ODM1, ODM2 und ODM3 ebenfalls in die Form einer Matrix-Differenzen-Gleichung zu bringen, um somit z.B. auch den Einfluß der Einbeziehung von Geschwindigkeitsdifferenzen auf das Systemverhalten besser zu verstehen. Bei dem ODM1 ließe sich dies direkt aufschreiben, indem wir die Terme  $(1 - \frac{9}{5}h\alpha)$  der Systemmatrizen 35 und 39 durch  $(1 - \beta\frac{9}{5}h\alpha)$  ersetzen. Bei ODM2 und ODM3 ist ein wenig mehr Überlegungsaufwand nötig, da in diesen Fällen jeweils auch weiter zurückliegende Simulationsschritte in Betracht gezogen werden.

Die numerische Simulation betreffend gibt es viele interessante Fragestellungen, die mit Hilfe des implementierten Simulationsprogramms beleuchtet werden könnten. Man könnte beispielsweise genauer untersuchen, wie der Einfluß einer allgemeinen Geschwindigkeitsbegrenzung aussieht und wann mit solchen Maßnahmen aufschaukelndes Verhalten verhindert werden kann. Weiterhin wäre es sicherlich sehr interessant zu erforschen, wie sich gesteigerte Individualität, z.B. durch individuell verschiedene Parameterwerte  $\alpha_i$ , auf das Gesamtverhalten des Systems auswirkt. Auch nicht-symmetrische Beschleunigungsvorschriften, beispielsweise eine höhere Sensibilität beim Abbremsen als beim Beschleunigen, sind eine untersuchenswerte Fragestellung. Man könnte hier eine Reihe weiterer interessanter Probleme anführen, deren numerische Untersuchung mit dem im Rahmen dieses Projektes entwickelten Simulationsprogramms möglich ist.

Die herausforderndste Aufgabe in der Zukunft wird aber sicherlich sein, auch Nicht-Linearitäten in die analytische Betrachtung einzubeziehen. In unserem Fall betrifft dies die Einbeziehung der im Simulationsprogramm implementierten Beschränkungen der Beschleunigung,  $a_{min}$  bzw.  $a_{max}$ , und der Geschwindigkeitsbegrenzungen  $v \geq 0$  und  $v \leq \max(v_{max}, v_{Schild})$ , wobei  $v_{Schild}$  für die durch Beschilderung angezeigte zugelassene Höchstgeschwindigkeit steht. Die Integration dieser Elemente wird die Darstellung des Verkehrssystems als Matrix-Differenzgleichung nicht länger ermöglichen und ein tieferer Einblick in die Theorie der diskreten dynamischen Systeme wird nötig sein. Im Hinblick darauf werden sicherlich auch Transformationsideen, von denen oben schon kurz gesprochen wurde, wieder interessant werden. Wir vermuten, daß die Information über den Ruhezustand des Systems (siehe Ende Abschnitt 3.2.3) hierzu von Nutzen sein kann.

Alles in Allem haben wir gesehen, welche wissenschaftliche Herausforderungen mit einer adäquaten Verkehrssimulation verbunden sind und wir wollen erneut deren hohe praktische Relevanz betonen. Wir hoffen mit dieser Arbeit einen Beitrag zu einem erweiterten Verständnis des so vielfältigen Phänomens Verkehr geleistet zu haben.

## Literatur

- [1] R. Akçelik. Travel time functions for transport planning purposes: Davidson’s function, its time-dependent form and an alternative travel time function. *Australian Road Research*, 21 (3):49–59, 2000.
- [2] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, and A. Nakayama. Analysis of optimal velocity model with explicit delay, 1998.
- [3] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun, 1997. 3. Ausgabe.
- [4] P. Cull, M. Flihive, and R. Robson. *Difference Equations – From Rabbits to Chaos*. Springer/New York, first edition, 2005.
- [5] K. B. Davidson. A flow–travel time relationship for use in transportation planning. *Proc. 3rd ARRB Conf. 3 (1)*, pages 183–194, 1966.
- [6] H. Ez-Zahraouya, Z. Benrihane, and A. Benyoussef. The optimal velocity traffic flow models with open boundaries. *Eur. Phys. J. B*, 36:289–293, 2003.
- [7] D. Helbing. Gas–kinetic derivation of navier–stokes–like traffic equations. *Physical Review E*, 53:23–66, 1996.
- [8] D. Helbing. *Verkehrsdynamik: Neue physikalische Modellierungskonzepte*. Springer/Berlin, 1997. 1. Ausgabe.
- [9] D. Helbing, S. Lammer, and J.-P. Lebacque. Self-organized control of irregular or perturbed network traffic, 2005.
- [10] E. Kamke. *Differentialgleichungen*. Akademische Verlag, Leipzig, 1967.
- [11] A. Kesting, M. Treiber, and D. Helbing. Game-theoretic approach to lane-changing in microscopic traffic models, 2006. Preprint submitted to Elsevier Science.
- [12] W. Krabs. *Dynamische Systeme, Steuerbarkeit und chaotisches Verhalten*. Teubner Verlag, 1998. 1. Ausgabe.
- [13] Maplesoft. Maple. Math and Engeneering Software by Maplesoft (<http://www.maplesoft.com/>).
- [14] K. Nakanishi, K. Itoh, Y. Igarashi, and M. Bando. Solvable optimal velocity models and asymptotic trajectory, 1996.
- [15] G. Orosz, R. E. Wilson, and B. Krauskopf. Global bifurcation investigation of an optimal velocity traffic model with driver reaction time. *Phys. rev., E Stat. nonlinear soft matter phys*, 70 (2):026207.1–026207.10, 2004.

- [16] M. Pursula. Simulation of traffic systems – an overview. *Journal of Geographic Information and Decision Analysis*, 3 (1):1–8, 1999.
- [17] S. Sawada. Generalized optimal velocity model for traffic flow, 2001.
- [18] P. J. Schneider. An operational analysis of traffic dynamics. *Journal of Applied Physics*, 24 (3):274–280, 1953.
- [19] G. W. Stewart and J.-G. Sun. *Matrix Perturbation Theory*. Academic Press Limited/London, first edition, 1990. Computer Science and Scientific Computing.
- [20] G. Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Online Version, Viena, 2004. <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/index.html>.
- [21] M. Treiber and D. Helbing. Realistische mikrosimulation von straßenverkehr mit einem einfachen modell. *Contribution to the 16. Symposium 'Simulationstechnik ASIM 2002', Rostock*, pages 514–520, 2002.
- [22] M. Treiber, A. Hennecke, and D. Helbing. Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, non-local traffic model. *Physical Review E*, 59:239, 1999.
- [23] M. Treiber, A. Kesting, and D. Helbing. Delays, inaccuracies and anticipation in microscopic traffic models. *PHYSICA A*, 360:71, 2006.
- [24] TU Dresden Fakultät Verkehrswissenschaften. *Professur für Verkehrsökonomie und -modellierung*. [http://tu-dresden.de/die\\_tu\\_dresden/fakultaeten/vkw/iwv/tme](http://tu-dresden.de/die_tu_dresden/fakultaeten/vkw/iwv/tme).
- [25] Herausgeber: Statistisches Bundesamt Pressestelle Wiesbaden. *Unfallgeschehen im Straßenverkehr 2005*. (<http://www.destatis.de>), Statistisches Bundesamt, Wiesbaden 2006.

## A Simulationsbeispiele

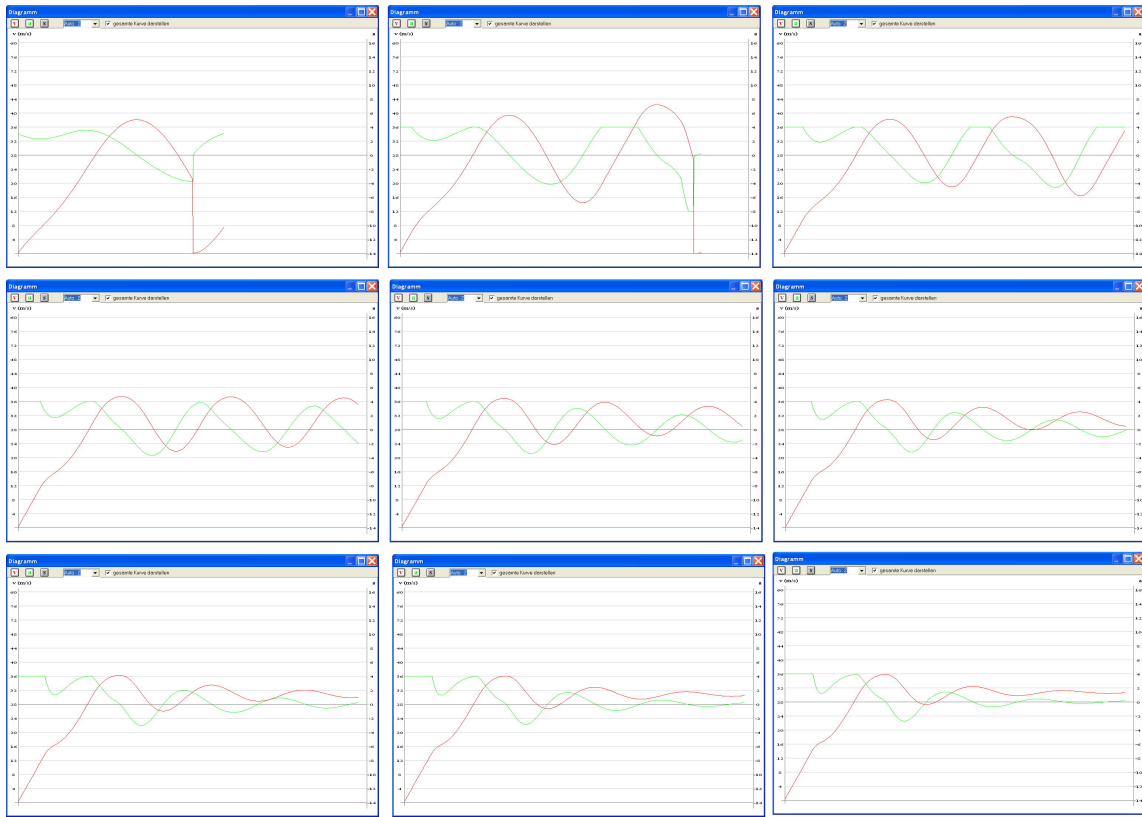


Abbildung 23: Simulationsserie. ODM2 (bzw. Modell 3) mit einem Parameterwert  $\beta = 0$ . Der Parameter  $\alpha$  wird ausgehend vom Bild oben links ( $\alpha = 0.1$ ) bis zum Bild unter rechts ( $\alpha = 1.0$ ) schrittweise erhöht. Dies stellt demnach die Simulation ohne Einbeziehung der Geschwindigkeitsunterschiede dar.



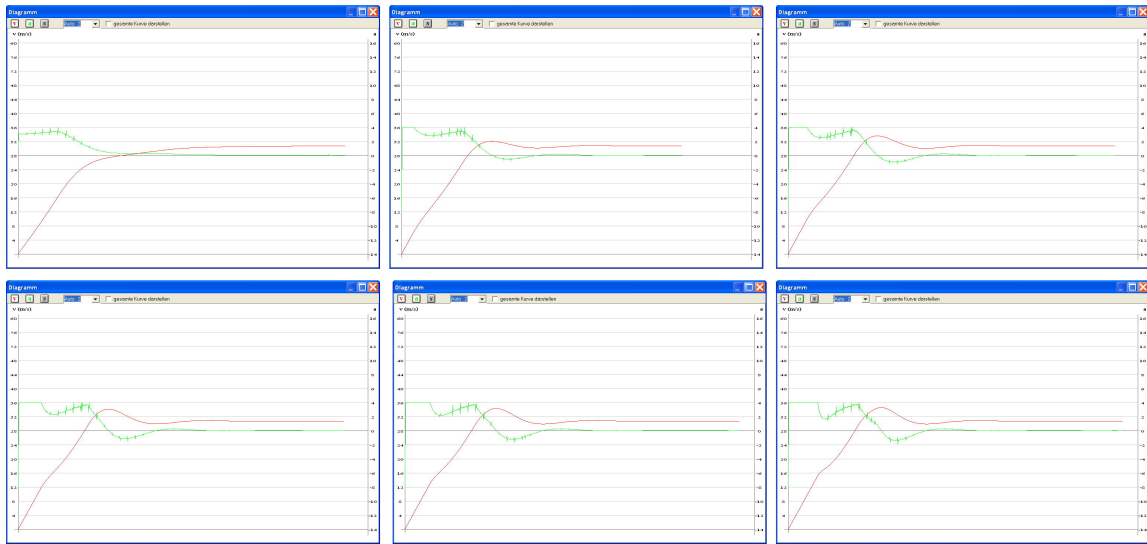


Abbildung 24: Simulationsserie. ODM2 (bzw. Modell 3) mit einem Parameterwert  $\beta = 0.5$ . Der Parameter  $\alpha$  wird wie in der vorherigen Abbildung schrittweise erhöht. Man beachte jedoch, daß aufgrund der geringen Veränderungen der Daten in  $\alpha \in [0.6, 0.9]$  dieser Bereich nicht dargestellt ist. Hierbei handelt es sich praktisch um die Simulation mit Einbeziehung der Geschwindigkeitsunterschiede zwischen aufeinanderfolgenden Fahrzeugen.

## B Verhalten zweier Autos auf der Kreisbahn

Wir sehen hier angefügt das Positions- und Geschwindigkeitsverhalten zweier Autos auf der Kreisbahn. Um einen Überblick über die potentiell auftretenden, verschiedenen Effekte in einem solchen System zu geben, stellen wir die analytische Lösung des in Abschnitt 3.2.3 betrachteten Anfangswertproblems bei verschiedenen Parameterkonstellationen dar. Man beachte, daß sowohl die Zeitschrittgröße  $h$ , die Länge der Kreisbahn  $L$  und  $\alpha$  variiert wurden. Die jeweilige Parameterkonstellation ist abgedruckt. Außerdem ist zu beachten, daß, einer besseren Darstellung geschuldet, mitunter eine verschiedene Anzahl von Simulationsschritten visualisiert ist.

Wir sehen hier, daß aufschaukelndes Verhalten erst bei verhältnismäßig großen Zeitschritten (hier  $h = 0.78$ ) auftritt. Sobald mehr Fahrzeuge auf der Kreisbahn vorhanden sind, ist jedoch ein Auftreten dieses Effektes auch bei kleineren Zeitschrittgrößen zu vermuten. Dies werden zukünftige Untersuchungen zu klären haben.

